

session 2013

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 20 MARS 2013

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Les nombres Harshad. Sujet national

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

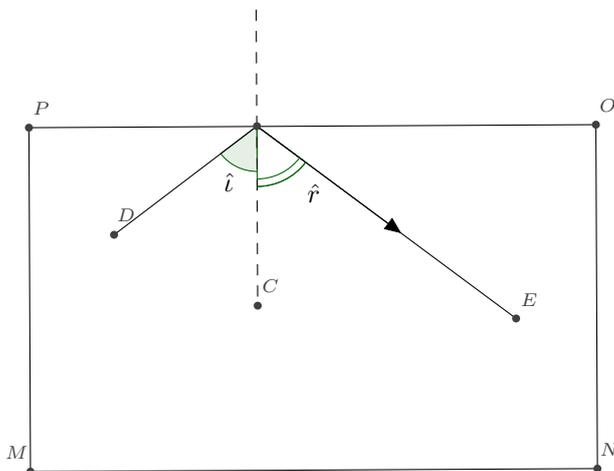
1. (a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
(b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
2. (a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
(b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.
3. (a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
(b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
(c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.
4. (a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A .
(b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
(c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.
5. (a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
(b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.
6. (a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair. En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
(b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2. Le billard rectangulaire. Sujet national

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.

Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence \hat{i} étant égal à l'angle de réflexion \hat{r} comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail $[MN]$.
 - (a) Quel point du rail $[PO]$ peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
 - (b) Quel point du rail $[PO]$ peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?
 - (c) Quel point du rail $[NO]$ peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?
2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail $[MN]$.
 - (a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
 - (b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3. Somme d'entiers consécutifs. Sujet Académique

On s'intéresse dans ce problème à la décomposition d'un nombre entier naturel sous la forme d'une somme d'au moins deux nombres entiers relatifs consécutifs.

Par exemple : 3 peut être décomposé en la somme de 2 entiers consécutifs :

$$3 = 1 + 2$$

mais aussi comme somme de 6 entiers consécutifs :

$$3 = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$

ou bien, 18 peut se décomposer comme somme de 3 entiers consécutifs :

$$18 = 5 + 6 + 7$$

mais aussi comme somme de 36 entiers consécutifs :

$$18 = -17 + (-16) + (-15) + \dots + 17 + 18$$

1. Décomposer l'entier 2013 en une somme de deux entiers consécutifs ; en une somme de trois entiers consécutifs ; en une somme de six entiers consécutifs.
2. Montrer que l'entier 2013 ne peut pas se décomposer en une somme de quatre entiers consécutifs.
3. L'entier 2013 peut-il se décomposer en une somme de cinq entiers consécutifs ?
4. Soit N un entier naturel qui s'écrit comme somme de k entiers consécutifs.
 - (a) Montrer que si k est pair, $\frac{k}{2}$ divise N .
 - (b) Montrer que si k est impair, k divise N .

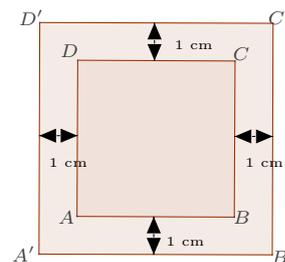
On pourra utiliser le résultat : $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ pour $k \geq 2$.

5. Déterminer et écrire toutes les décompositions de l'entier 2013 en somme d'entiers consécutifs (On rappelle que $2013 = 3 \times 11 \times 61$).
6. Expliquer pourquoi l'entier 2048 ne possède qu'une seule décomposition en somme d'entiers consécutifs.
7. Si N est un nombre entier strictement positif, ϕ_N le nombre de diviseurs impairs de N et D_N le nombre de décompositions en somme d'entiers consécutifs, démontrer que :

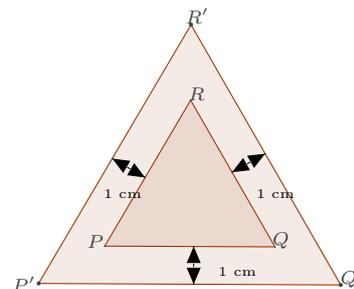
$$D_N = 2 \times \phi_N - 1$$

Exercice 4. Pousser les bords... Sujet Académique

1. Tous les côtés d'un carré de périmètre 12 cm sont déplacés vers l'extérieur de 1 cm comme indiqué sur la figure. Montrer que l'aire du carré augmente ainsi de 16 cm^2 .



2. Tous les côtés d'un triangle équilatéral de périmètre 12 cm sont déplacés vers l'extérieur de 1 cm. Calculer en cm^2 l'augmentation de l'aire du triangle.



3. On considère maintenant un polygone convexe quelconque (on rappelle qu'un polygone est convexe lorsque chacun de ses angles a une mesure inférieure à 180° et que la somme des mesures des angles d'un polygone convexe à n côtés est $(n - 2) \times 180^\circ$).

Tous les côtés d'un polygone convexe de périmètre 12 cm sont déplacés vers l'extérieur de 1 cm. Démontrer que son aire augmente de plus de 15 cm^2 .

4. Existe-t-il un polygone convexe de périmètre 12 cm dont l'aire augmente de moins de $15,5 \text{ cm}^2$ si l'on déplace tous ses côtés de 1 cm vers l'extérieur ? Justifier la réponse.