session 2014

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 19 MARS 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures

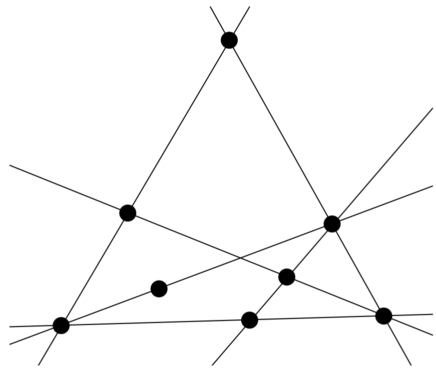
Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Figures équilibrées. Sujet national

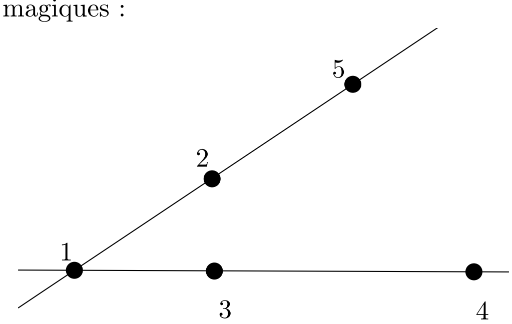
La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



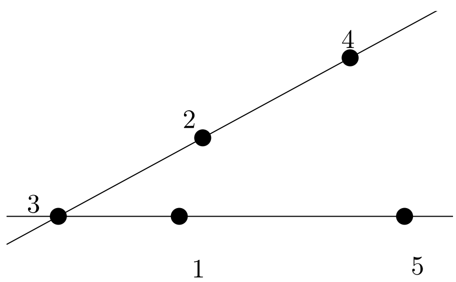
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   (a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   (b) de 9 points marqués et 8 droites.

   Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.

   Cette numérotation est alors dite **magique** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé **constante magique** de la numérotation.
2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



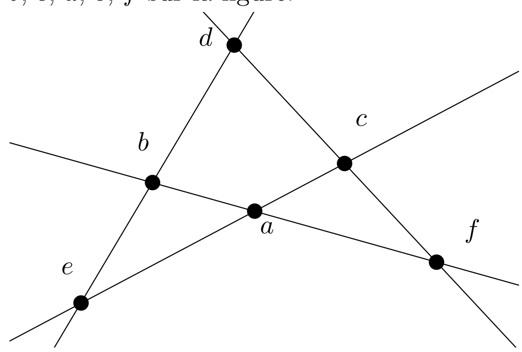
$K = 8$



$K = 9$

   Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
   Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.
3. La figure équilibrée ci-dessous est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

   (a) Démontrez que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   (b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ? Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

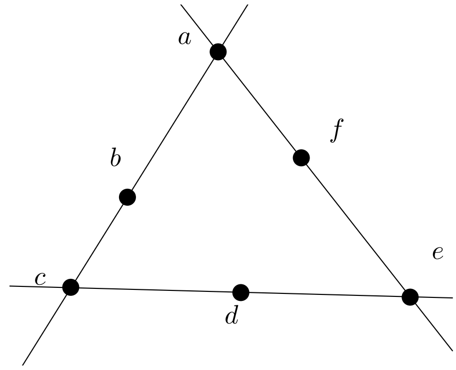


4. La figure équilibrée ci-dessous est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

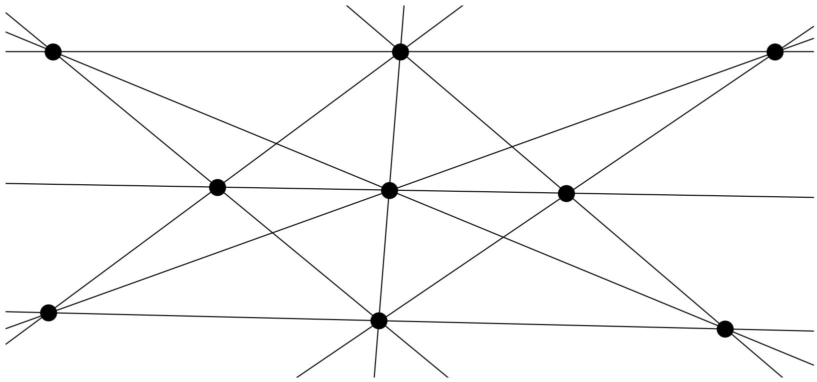
   (a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

   (b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

   (c) Déterminer la (les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-dessous est constituée de 9 points et 10 droites.
   Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice national 2 : le plus court possible

Quatre villes - Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon - sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

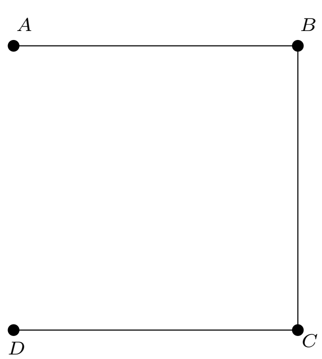


fig. 1
assistant n° 1

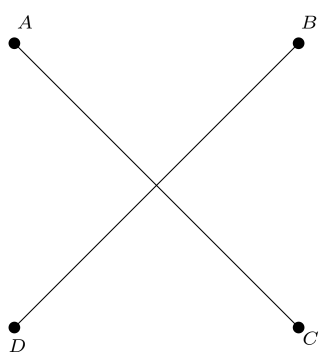


fig. 2
assistant n°2

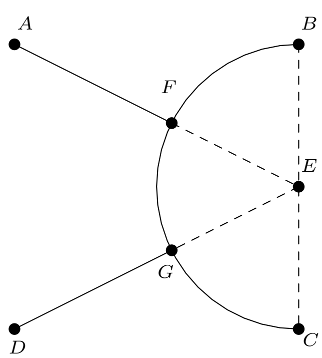


fig. 3
assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

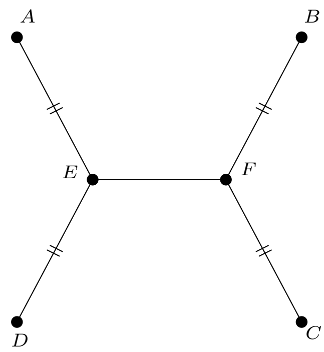
   

   fig. 4

   Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geq AC$;
on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment $[AC]$.

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment $[AB]$ (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

   On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de coté, comme dans le dessin suivant.

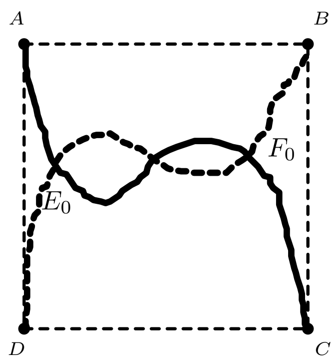
   

   fig. 5

   On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

   En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (fig. 5).

   Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (fig. 6).

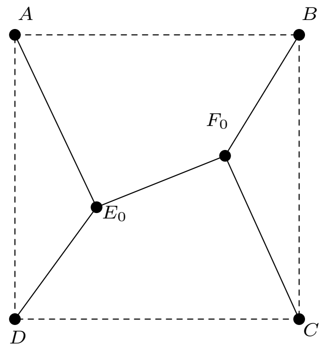


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

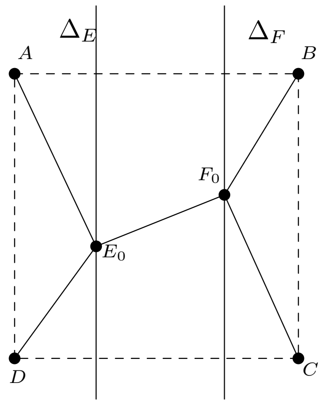


fig. 7

   (a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

   (b) Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

   (c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment $[AD]$ (fig. 8).

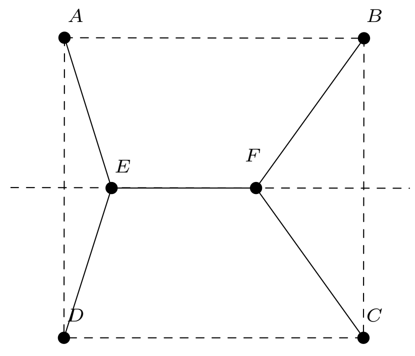


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de $[AB]$.

   (a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de $[AB]$.

   (b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (fig. 4).

   Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

   (c) Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

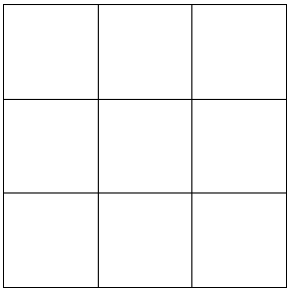
Exercice 3 : Nombres premiers permutables

Un nombre entier, supérieur ou égal à 2 est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

1. Les nombres 51, 67, 779 sont-ils premiers ?
   On dit qu'un nombre entier, supérieur ou égal à 2 est premier permutable lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   – ses chiffres non forcément distincts sont écrits de gauche à droite dans l'ordre croissant et aucun n'est nul,
   – il est premier et tous les nombres obtenus en changeant l'ordre des chiffres sont également premiers.
2. Montrer que 13 est un nombre premier permutable.
3. Montrer que 137 n'est pas un nombre premier permutable.
4. Soit $N > 2$ un nombre premier permutable. Démontrer que tous ses chiffres sont impairs.
5. On appelle E l'ensemble des nombres premiers permutables à un, deux ou trois chiffres.
   Quel est le plus grand élément de E ? Justifier la réponse.
6. On appelle F l'ensemble des nombres premiers permutables dont les chiffres **distincts deux à deux** sont écrits de gauche à droite dans l'ordre strictement croissant.
   Quel est le plus grand élément de F ? Justifier la réponse.

Exercice 4 : Colorier la grille

Une grille $a \times b$ est un quadrillage d'un rectangle qui comporte a cases sur une dimension et b cases sur l'autre.



Une grille 3×3

Dans une telle grille deux cases sont dites voisines si elles se touchent par un côté ou par un sommet.

On appelle case intérieure, toute case qui n'est pas en contact avec un bord de la grille.

On veut colorier les cases de telles grilles en noir ou blanc en utilisant la règle suivante :

– toute case noire intérieure doit avoir exactement cinq cases voisines blanches,
– et toute case blanche intérieure doit avoir exactement quatre cases voisines noires.

1. Réaliser un tel coloriage sur une grille 3×3 avec une case noire au centre, puis avec une case blanche au centre.
2. Montrer qu'une grille 3×3 coloriée en utilisant la règle comporte exactement 4 cases noires.
3. Réaliser un tel coloriage **avec un nombre minimal de cases noires**
   – sur une grille 3×4.
   – sur une grille 3×5.
   – sur une grille 9×9.
   – sur une grille 8×9.
   Justifier dans chacun des cas pourquoi le nombre de cases noires trouvé est minimal.
4. Réaliser un tel coloriage **avec un nombre maximal de cases noires**
   – sur une grille 3×4.
   – sur une grille 3×5.
   – sur une grille 9×9.
   – sur une grille 8×9.
   Justifier dans chacun des cas pourquoi le nombre de cases noires trouvé est maximal.