Olympiades académiques

de Mathématiques, classe de Première

Académie de Lyon.

Mercredi 18 mars 2015 de 8 h à 12 h.

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de l'épreuve : 4 heures

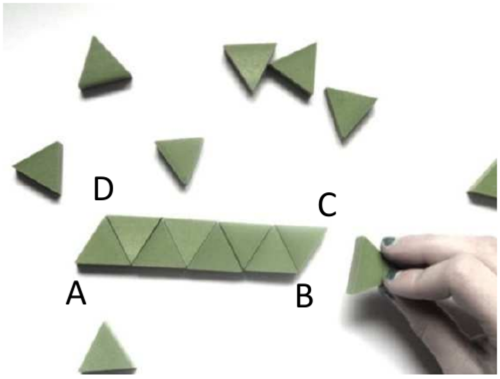
Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début.
Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1. Défi entre sœurs. Sujet national

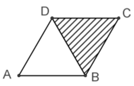
Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre. Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus. Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :



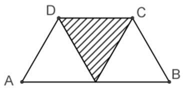
- $ABCD$ un quadrilatère construit par Clémence ;
- $L= AC$ la longueur de la diagonale $[AC]$;
- $l = BD$ la longueur de la diagonale $[BD]$.

Partie A

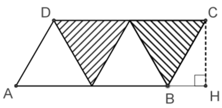
1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.
2. Calculer les longueurs L et l pour les cas suivants :



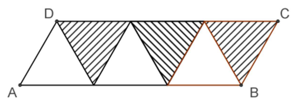
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?
3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re *propriété* : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2^{e} *propriété* : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère $ABCD$ du type ci-dessus ?

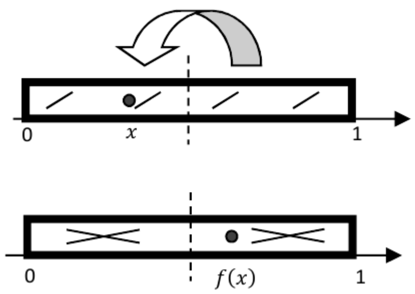
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2015}$?

4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi (détailler la démarche) ? Si oui, le démontrer.

Exercice 2. On est les rois ! Sujet national

Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.



Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de $[0\,;\,1]$ appartient à $[0\,;\,1]$.

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,;\,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse $0,33$? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

5. Déterminer tous les nombres de $[0\,;\,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après la question **B.5** ou même **B.2**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Algorithme de l'exercice 2

```
Variables
        x est un élément de [0 ; 1]
Début
        Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
        Tant que x ≠ 0 faire
                Si x ⩽ 1/2 alors
                        x prend la valeur 2x
                Sinon
                        x prend la valeur 2(1 − x)
        Fin tant que
Fin
```

Exercice 3. Nombres automorphes

17 est un nombre entier naturel à deux chiffres, mais dans cet exercice, nous considérons que 17, écrit sous la forme 0017, est aussi un nombre entier naturel à 4 chiffres.

De cette façon, il y a 10^4 nombres entiers naturels à 4 chiffres, à savoir 0000, 0001, 0002, ..., 9997, 9998, 9999. De façon plus générale, il y a 10^n nombres entiers naturels à n chiffres.

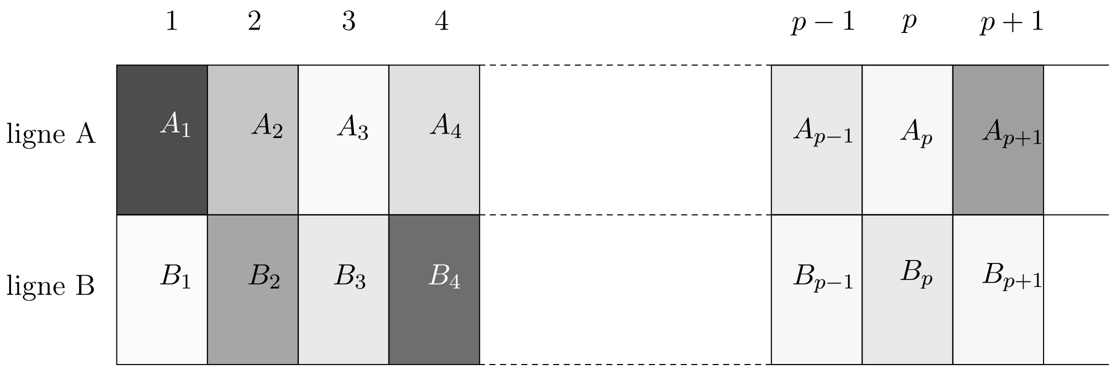
Un nombre entier naturel à n chiffres est dit automorphe lorsqu'il apparait à la fin de son carré.

Par exemple, 5 est automorphe à un chiffre car $5^2 = 25$ et 25 se termine par 5. Mais 5, comme nombre à 2 chiffres, s'écrit 05 et n'est pas automorphe, car $05^2 = 25$ qui ne se termine pas par 05.

1. Vérifier que 0001 et 0625 sont des nombres automorphes à 4 chiffres.
2. Donner les quatre nombres automorphes à 1 chiffre.
3. Donner les quatre nombres automorphes à 2 chiffres.
4. Soit b un nombre automorphe à 2 chiffres, trouver a (avec a entier compris entre 0 et 9) tel que 10^2a+b soit un nombre automorphe à 3 chiffres.
5. Donner les quatre nombres automorphes à 10 chiffres en expliquant la méthode utilisée.
6. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il y a exactement quatre nombres automorphes à n chiffres.

Exercice 4. Le carreleur

Objectif : Un carreleur dispose d'un choix très varié de couleurs pour son carrelage. Il souhaite installer dans une salle de bain une frise de 2 carreaux de hauteur sur une longueur indéterminée, sans que deux carreaux qui ont un côté en commun n'aient la même couleur, comme présenté ci-dessous.

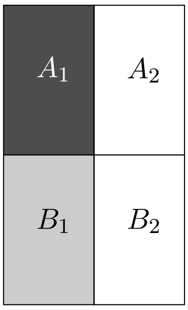


Partie 1

Le carreleur fait des essais de couleurs sur un échantillon de quatre carreaux.

Premier essai

Dans cet essai et pour répondre aux trois questions suivantes, le carreleur s'impose un carreau noir en A_1 et un carreau gris en B_1.



1. S'il ne possède que ces 2 couleurs de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
2. S'il possède une troisième couleur de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
3. S'il possède en tout n couleurs différentes (avec n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$), combien peut-il faire d'échantillons ?

   On donnera une expression du nombre d'échantillons en fonction de n.

Second essai

Dans cet essai et pour répondre aux trois questions suivantes, le carreleur ne s'impose pas de couleur en A_1 ni en B_1.

1. S'il possède uniquement 2 couleurs différentes de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
2. S'il possède 3 couleurs différentes de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
3. S'il possède n couleurs différentes de carreaux (avec $n \geqslant 2$), combien peut-il faire d'échantillons ?

   On donnera une expression du nombre d'échantillons en fonction de n.

Partie 2

Le carreleur a terminé ses essais et commence la construction de sa frise de deux carreaux de hauteur et k colonnes. Il dispose de n couleurs tel que $n \geqslant 2$ et décide toujours que deux carreaux de couleur identique ne peuvent pas avoir un côté commun.

Exprimez en fonction de k et n le nombre de frises que le carreleur peut réaliser, en justifiant la réponse.