Olympiades académiques

de Mathématiques, classe de Première

Académie de Lyon

Mercredi 16 mars 2016 de 8 h à 10 h

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, les énoncés **des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »).

Une pause de dix minutes est prévue avant la deuxième partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h 30.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés des exercices nationaux doivent être rendus aux surveillants à l'issue de cette première épreuve.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices**. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 2 (*Liber abaci*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 3 (*Demi-tour !*).

Ce sujet comporte 5 *pages numérotées de* 1/5 *à* 5/5.

1 Échanges thermiques (*pour tous les candidats*)

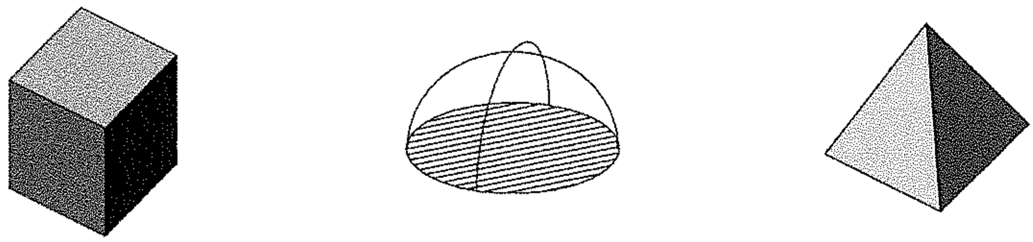
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de l'aire de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment , mesurée en m^2, à son volume, mesuré en m^3. Le facteur de compacité $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

   (a) Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.

   (b) Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

   (c) Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a et de hauteur verticale a.



   (d) En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z.

   (a) Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

   (b) En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

   (c) En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B, et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geqslant 3$$

   (d) Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est :

$$c = 2 \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

   (e) Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leqslant q \leqslant r$.

   (a) Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que
   $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}$$

   (b) Démontrer que $3 \leqslant p \leqslant 6$.

   (c) Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leqslant q \leqslant 12$.

   (d) Terminer la résolution.

2 Liber abaci (*pour les candidats de la série S uniquement*)

Il y a 4 000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une « écriture égyptienne » de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. **Un algorithme.** Soit p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0\,;1[$.

   Poser $k = 1$, $p_1 = p$, $q_1 = q$.
   Tant Que $p_k \neq 0$
       Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$.
       Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.
       Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.
   Fin du Tant Que.

   (a) On fait tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

   (b) On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du N-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

(c) Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0\,;\,1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1 202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ *rencontrées dans ce problème.*

3. Et pour $\frac{p}{q} \geqslant 1$?

   (a) L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q} > 1$?

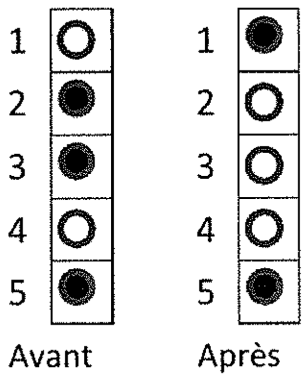
   (b) Soit a un entier supérieur ou égal à 3.
   Justifier que :
   $$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1$$

   (c) En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :
   $$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leqslant 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}$$

   (d) Établir alors que tout nombre rationnel $\frac{p}{q} \geqslant 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

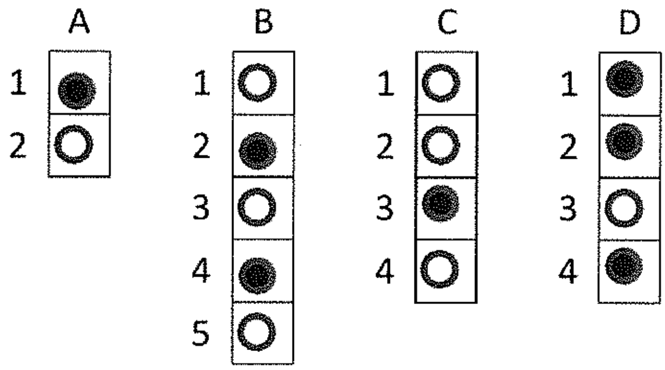
3 Demi-tour ! (*pour les candidats des séries autres que S uniquement*)

On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite – on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-dessous donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.



L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?
2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?
3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-dessous.



4. On donne l'algorithme suivant pour une configuration de n cases :

   Pour k allant de n à 1 par pas de -1
   Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton
   Fin Pour

   (a) Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?

   (b) Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

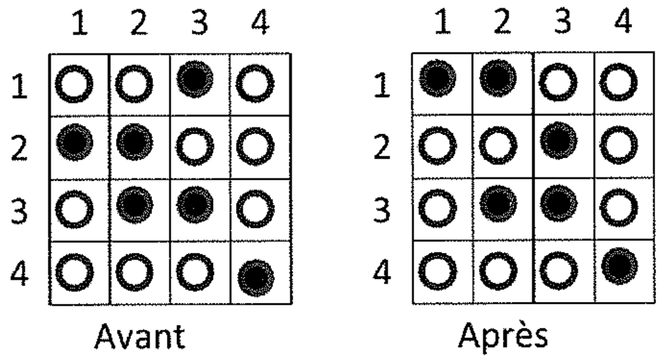
5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :

   (a) À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.

   (b) À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne le n°1 et le n°n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qu'il soit impossible à blanchir.

6. **Jeu à deux dimensions.**

   On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton (1, 1) et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessous montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4×4.



   Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

Olympiades académiques

de Mathématiques, classe de Première

Académie de Lyon

Mercredi 16 mars 2016 de 10 h 10 à 12 h 10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

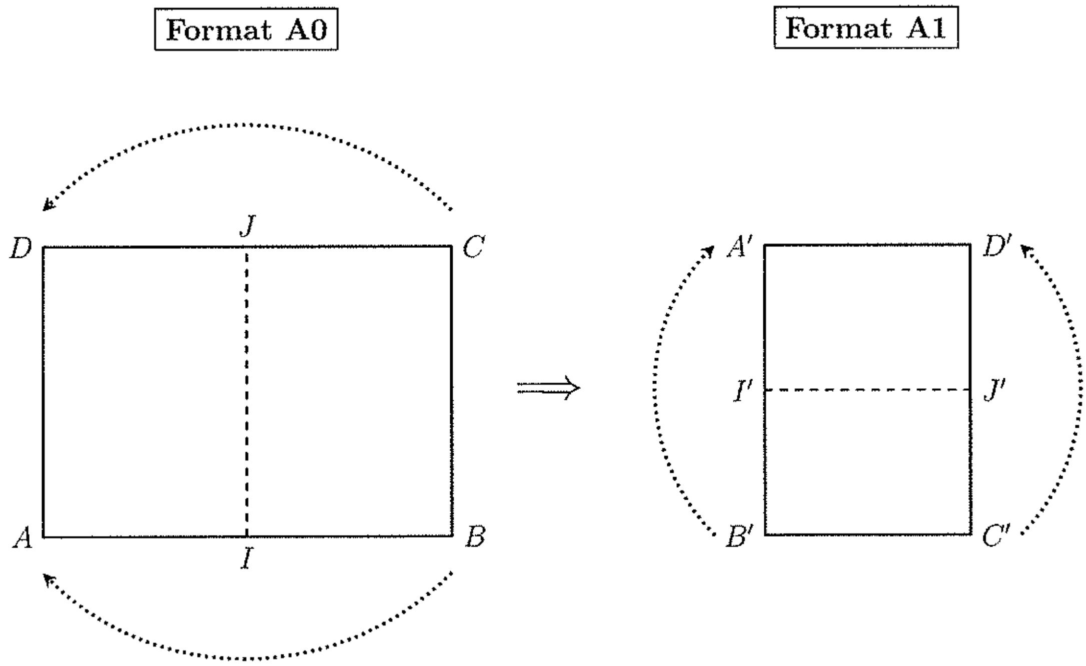
Exercices académiques

Les candidats de toutes les séries traitent les **deux exercices**.
Ce sujet comporte 3 *pages numérotées de* 1/3 *à* 3/3.

1 Plier une feuille de papier (*pour tous les candidats*)

Le format de la feuille de cet énoncé est un format dit A4. Mais d'où vient cette dénomination ?
Une feuille au format A0 est un rectangle ABCD d'aire 1 m^2 avec $[AB]$ la longueur et $[BC]$ la largeur. On pose $AB = L_0$ et $BC = l_0$. On nomme k le rapport : $\frac{L_0}{l_0} = k$ (on a donc $k > 1$). Le nombre k n'est pas quelconque mais a la propriété suivante :

> On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.
> Lorsqu'on plie la feuille $ABCD$ de format $A0$ suivant la droite (IJ) (en superposant A et B ainsi que C et D, comme indiqué sur le dessin), on obtient une feuille au format A1, c'est-à-dire un rectangle $A'B'C'D'$ d'aire $0,5\,m^2$, de longueur notée L_1 et de largeur l_1.
> Dans ces conditions $k = \frac{L_1}{l_1}$ et $L_1 = l_0$ et $l_1 = \frac{L_0}{2}$.
> Une feuille A0 est ainsi un agrandissement d'une feuille A1.



1. Démontrer que $k = \sqrt{2}$.

2. Calculer les valeurs exactes exprimées en mètre de L_0 et l_0.

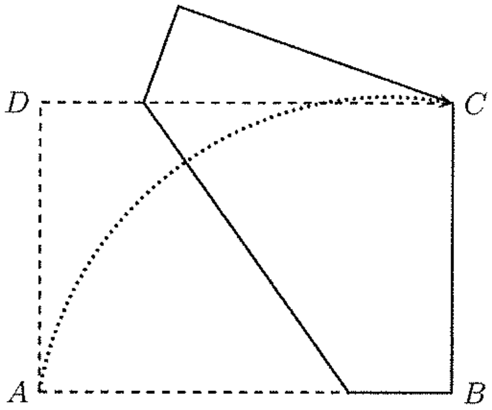
   On recommence le même procédé en pliant la feuille de format A1 pour obtenir une feuille de format A2. En réitérant encore le procédé on obtient ainsi une feuille de format A3, puis de format A4 ...

3. Calculer l'aire exacte, en cm^2, d'une feuille au format A4.

4. Déterminer les valeurs exactes des dimensions, en cm, des côtés d'une feuille au format A4 et arrondir ces résultats au dixième.

5. Si l'on plie une feuille A0 en superposant deux de ses sommets diagonalement opposés, à savoir A et C, on obtient un pentagone ayant un axe de symétrie.

Pliage en pentagone



Calculer, en cm^2, l'aire exacte du pentagone obtenu.

2 Nombres tri-tri (*pour tous les candidats*)

Les nombres *tri-tri* sont les entiers positifs de trois chiffres dont les seuls chiffres possibles sont 1, 2 ou 3.

Par exemple 123 et 122 sont des nombres *tri-tri* mais pas 142.

1. Démontrer qu'il existe 27 nombres *tri-tri* distincts.

Trois nombres *tri-tri* distincts forment un trident si et seulement si pour les trois positions possibles (unités, dizaines, centaines), leurs trois chiffres sont soit égaux, soit tous distincts.

121, 122 et 113 ne constituent pas un *trident* car les chiffres des dizaines ne sont ni tous égaux ni tous distincts bien que les chiffres des centaines soient tous égaux et que les chiffres des unités soient tous différents.

Il existe trois sortes de *tridents* : *trident2*, *trident1*, *trident0*.

- 121, 122 et 123 constituent un *trident2* : les chiffres des trois nombres sont égaux pour deux positions sur trois
- 123, 222 et 321 constituent un *trident1* : les chiffres des trois nombres sont égaux pour une position sur trois
- 123, 231 et 312 constituent un *trident0* : les chiffres des trois nombres sont tous différents pour trois positions sur trois

2. (a) On considère les nombres *tri-tri* 122 et 323. Combien de nombre(s) *tri-tri* peut-on leur associer pour former un *trident* ? Écrire ce(s) nombre(s).
   (b) Montrer que si on a deux nombres *tri-tri*, on ne peut leur associer qu'un unique nombre *tri-tri* pour former un *trident*.

On suppose qu'on choisit au hasard, successivement et sans remise, trois nombres distincts dans l'ensemble des nombres *tri-tri*.

3. (a) Si on tient compte de l'ordre des tirages, montrer qu'on peut obtenir six *tridents* constitués des mêmes nombres.
   (b) Démontrer qu'il existe 117 tridents distincts (si l'on ne tient pas compte de l'ordre des tirages).
4. On suppose qu'on choisit au hasard un *trident* parmi l'ensemble des *tridents*.
   (a) Combien existe-t-il de tridents du type *trident2* ?
   En déduire la probabilité d'avoir un *trident2*.
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir un *trident1* ?
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir un *trident0* ?
5. Cette question peut être traitée indépendamment des autres.
   (a) Trouver un ensemble de 8 nombres *tri-tri* à partir desquels on ne peut former aucun *trident*.
   (b) Trouver un ensemble de 9 nombres *tri-tri* à partir desquels on ne peut former aucun *trident*.