

# Olympiades nationales de mathématiques

## Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

## Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices**. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Somme de carrés en abyme*) et 2 (*1,2,3 ... dalez !*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Somme de carrés en abyme*) et 3 (*Boîte de canelés bordelais*).

— Crédit Mutuel —  
Enseignant

CASIO

Animath

TEXAS INSTRUMENTS

Incia

ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE  
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Google

## Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

### Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.

Ainsi, par exemple,  $f(5) = 5^2 = 25$ ,  $f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$ ,  $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$ .

#### Introduction

1. **a.** Calculer  $f(1)$ ,  $f(11)$  et  $f(111)$ . Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par  $f$ .

**b.** Calculer  $f(23)$ ,  $f(32)$  et  $f(320)$ .

**c.** Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par  $f$ .

#### La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul  $u_0$ , on considère la suite de nombres définie par  $u_0$  et par ses images successives par  $f$  notées  $u_1 = f(u_0)$ ,  $u_2 = f(u_1)$ , ...,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , etc.

2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour  $u_0 = 301$ , puis pour  $u_0 = 23$  et pour  $u_0 = 1030$ .

Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?

3. Calculer les nombres  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_8$  pour  $u_0 = 4$ .

Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

#### Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée  $\mathcal{P}$  dans la suite du problème :

Si  $u_0$  est un entier non nul :

- soit, il existe un rang  $N$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N$ ,  $u_n = 1$ .

- soit, il existe un rang  $M$  tel que  $u_M = 4$ , et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, ...

On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang  $M$ .

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. **a.** Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur  $u = 42$  ?

**b.** Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » pour une valeur  $u$  donnée alors  $u$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

**c.** Comment le programme se comporterait-il si un nombre  $u$  ne vérifiait pas la propriété  $\mathcal{P}$  ?

**d.** Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété  $\mathcal{P}$ . Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

**Variable :**  $u$  entier naturel non nul

Entrer  $u$

Tant que ( $u \neq 1$  et  $u \neq 4$ )

$u \leftarrow f(u)$

Afficher  $u$

Fin tant que

Afficher « propriété vérifiée »

#### Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété  $\mathcal{P}$  s'étend aux entiers naturels non nul  $u_0$  s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que  $a \neq 0$  et soit  $x = 100a + 10b + c$ .

**a.** Montrer que  $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$  et en déduire que  $f(x) \leq x - 1$ .

**b.** Si  $u_0$  s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang  $J$  tel que  $u_J \leq 99$ . Conclure.

#### Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul  $u_0$ .

6. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 4, on a :  $81p < 10^{p-1}$ .

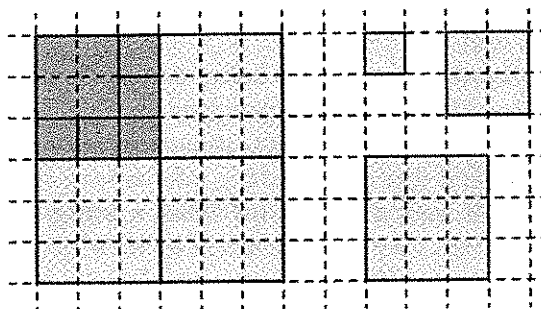
**b.** En déduire que, si un terme  $u_n$  de la suite s'écrit avec  $p$  chiffres ( $p \geq 4$ ), alors  $u_{n+1} = f(u_n)$  s'écrit avec au plus  $p - 1$  chiffres.

**c.** Montrer que pour tout entier  $u_0$  il existe un rang  $K$  tel que  $u_K \leq 999$ . Conclure.

## Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

**1,2,3 ...dallez !**

Dans tout ce qui suit,  $n$  désigne un entier naturel non nul.  
 Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur  $n$ . On note ce carré  $K_n$ , et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.  
 Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur  $i$  ( $i$  valant 1, 2 ou 3) est de taille  $i$ .  
 On montre ci-contre un pavage du carré  $K_6$  comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. **a.** Est-il possible de paver le carré  $K_6$  en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?
- b.** Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré  $K_6$  sans utiliser de carré de taille 1.
- c.** Donner un pavage de  $K_5$  comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de  $K_5$  avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

**Tout carré  $K_n$  peut être pavé avec  $n^2$  carrés de taille 1. Certains  $K_n$  peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré  $K_n$  par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note  $u(n)$  ce nombre.**

2. Déterminer  $u(1)$ ,  $u(8)$  et  $u(9)$ .
3. Plus généralement, que vaut  $u(n)$  si  $n$  est pair ? Que vaut  $u(n)$  si  $n$  est un multiple de 3 ?

**On s'intéresse donc dorénavant aux entiers  $n$  impairs et non multiples de 3.**

4. **a.** Montrer que si  $n$  est impair et non multiple de 3, alors  $n + 6$  est impair et non multiple de 3.
- b.** Montrer que, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 4 :  $u(n + 6) \leq u(n)$  (on considérera les carrés  $K_{n+6}$  et  $K_n$ ).
5. **a.** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que  $u(11) \leq 1$ .
- b.** Montrer que  $u(13) \leq 1$ .
- c.** On admet que  $u(5) = 4$  (comme dit plus haut) et que  $u(7) = 3$ . Montrer que, pour tout entier  $n$  impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11,  $u(n) \leq 1$ .

**Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?**

6. Pour tout entier  $n$  impair, on partage le carré  $K_n$  en  $n^2$  cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple  $(i, j)$  où  $i$  est le numéro de la ligne et  $j$  le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure,  $n = 5$ ). On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple  $(i, j)$  qui la repère, le coefficient  $-1$  si  $i$  et  $j$  sont pairs, 1 si  $i$  et  $j$  sont impairs et 0 sinon.

(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
(2,1)				
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)

- a.** Exprimer en fonction de  $n$ , la somme des coefficients de toutes les cases de  $K_n$ .
- b.** Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré  $K_n$ , alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou  $-3$ .
- c.** Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?
- d.** Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?
- e.** Conclure que, pour tout entier  $n$  :
  - $u(n) = 0$  si  $n$  est un multiple de 2 ou de 3 ;
  - $u(n) = 1$  si  $n$  est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.
- f.** Que vaut  $u(2017)$  ?

## Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

### Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtisseries)

#### C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?

2. *a.* Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.

*b.* Montrer que, s'il existe un entier  $n$  tel que tout achat de  $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5$  canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à  $n$ .

*c.* Déterminer le plus petit entier  $n$  réalisant la condition précédente.

3. *a.* Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?

*b.* Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

#### Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de  $n$  canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. *a.* Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?

*b.* Et pour répartir 75 canelés ?

*c.* Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.

*a.* Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?

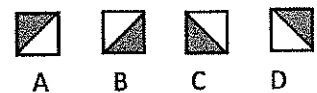
*b.* Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

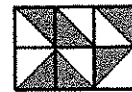
## Exercice académique n°1 à traiter par tous les candidats

### Étude de pavages de Truchet

On considère des carreaux identiques, colorés en gris et en blanc de part et d'autre d'une diagonale. Ces carreaux étant utilisables dans tous les sens, on désigne par les lettres A, B, C, D les quatre positions ci-contre :



En disposant ces carreaux suivant p lignes et q colonnes, on forme des ensembles appelés "Pavages de Truchet p x q".



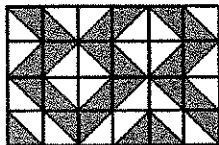
*Exemple de pavage de Truchet 2 x 3*

**La partie 1 est indépendante des parties 2 et 3**

#### PARTIE 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

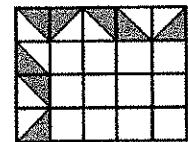
- 1 ) Montrer qu'il existe exactement 4096 pavages de Truchet 2 x 3.
- 2 ) Exprimer le nombre de pavages de Truchet p x q en fonction de p et q.

#### PARTIE 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires



*Exemple de pavage linéaire 4 x 6*

Un "Pavage linéaire" est un pavage de Truchet dans lequel, d'un carreau au suivant, les deux triangles situés côte-à-côte sont de la même couleur (voir exemple ci-contre).



- 1 ) Recopier la figure ci-contre puis colorer la grille pour obtenir un pavage linéaire 4 x 5.

- 2 ) On considère un pavage linéaire p x q dont on connaît la 1<sup>ère</sup> ligne et la 1<sup>ère</sup> colonne. On souhaite créer un algorithme qui, à partir de la 1<sup>ère</sup> ligne L(1), ..., L(q), et en indiquant la 1<sup>ère</sup> case G(1) de la ligne suivante, permette d'afficher la composition complète du pavage linéaire p x q, ligne après ligne.

L(1)	...	L(i)	L(i+1)	...	L(q)
G(1)	...	G(i)	G(i+1)	...	G(q)
...					

Dans l'algorithme en annexe, quatre lignes comportent des pointillés. Les recopier et les compléter en précisant les lettres manquantes.

- 3 ) Montrer que le nombre de pavages linéaires p x q est égal à  $2^{p+q}$ .

#### PARTIE 3 : Composition des pavages linéaires

On code l'orientation des diagonales des carreaux A, B, C, D avec les chiffres "0" et "1" comme ci-dessous :

Carreaux :				
Noms :	A	B	C	D
Codage de diagonale :	1	1	0	0

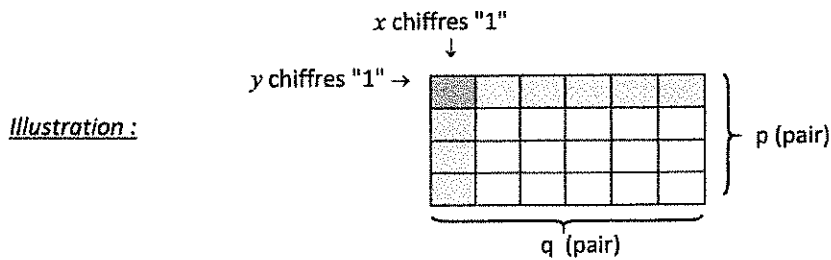
A chaque pavage linéaire on associe alors un tableau, appelé tableau linéaire, contenant les chiffres 0 et 1.

Par exemple le pavage linéaire a pour tableau linéaire

1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0

- 1 ) **a)** En utilisant le 3) de la Partie 2, justifier qu'il existe exactement huit tableaux linéaires 2 x 2.
- b)** Identifier ces huit tableaux linéaires dans l'exemple donné ci-dessus, et les représenter sur votre copie.
- c)** Montrer que les deux lignes d'un tableau linéaire 2 x q sont soit identiques, soit complémentaires (c'est-à-dire que chaque colonne du tableau est composée de deux chiffres distincts).

- 2 ) a ) Justifier que dans un pavage linéaire, deux carreaux identiques ne peuvent être placés côte-à-côte.
- b ) Pour chacun des tableaux linéaires  $2 \times 2$  obtenus au 1 ) b ), préciser le nombre de carreaux A, B, C, D composant les pavages linéaires  $2 \times 2$  correspondants.
- c ) On considère un pavage linéaire  $p \times q$ , avec  $p$  et  $q$  pairs, dont le tableau linéaire contient  $x$  chiffres "1" dans la 1<sup>ère</sup> colonne et  $y$  chiffres "1" dans la 1<sup>ère</sup> ligne.



Préciser, en fonction de  $x ; y ; p ; q$ , le nombre de carreaux A, B, C, D du pavage linéaire dans les deux cas où :

- i) La première case (en 1<sup>ère</sup> ligne et 1<sup>ère</sup> colonne) contient le chiffre "1",
- ii) La première case (en 1<sup>ère</sup> ligne et 1<sup>ère</sup> colonne) contient le chiffre "0".

### Annexe (Partie 2, Question 2)

#### Début de l'algorithme :

Variables : L, G (tableaux pouvant contenir les lettres A, B, C, D)  
 $i, j, p, q$  : variables entières

Saisir les valeurs de  $p$  et de  $q$  (entiers  $\geq 2$ )

Pour  $i$  allant de 1 à  $q$  : Saisir la lettre  $L(i)$  ; Afficher  $L(i)$

Pour  $j$  allant de 2 à  $p$

#### Début

| Saisir la 1<sup>ère</sup> lettre  $G(1)$  de la ligne suivante

| Pour  $i$  allant de 1 à  $q-1$

#### | Début

		Si $G(i) = A$ ou $C$	ET	$L(i+1) = A$ ou $D$	alors	Mettre la lettre ..... dans $G(i+1)$
		Si $G(i) = A$ ou $C$	ET	$L(i+1) = B$ ou $C$	alors	Mettre la lettre ..... dans $G(i+1)$
		Si $G(i) = B$ ou $D$	ET	$L(i+1) = A$ ou $D$	alors	Mettre la lettre ..... dans $G(i+1)$
		Si $G(i) = B$ ou $D$	ET	$L(i+1) = B$ ou $C$	alors	Mettre la lettre ..... dans $G(i+1)$

#### | Fin

| Pour  $i$  allant de 1 à  $q$  : Afficher  $G(i)$

| Pour  $i$  allant de 1 à  $q$  : Mettre la lettre  $G(i)$  dans  $L(i)$

#### Fin

#### Fin de l'algorithme

## Exercice académique numéro 2 à traiter par tous les candidats

### Palindromes Binaires

#### PARTIE 1

Tout nombre entier naturel s'écrit de manière unique comme somme de puissances de 2.

#### Exemple

$$53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$
$$53 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

On dit que le nombre 53 s'écrit 110101 dans le système binaire (base 2) et on écrira :

$$53 = (110101)_2$$

- 1) Ecrire dans le système binaire le nombre 135.
- 2) Déterminer à quel nombre correspond  $(101011)_2$ .
- 3) Démontrer que  $2^n - 1 = \underbrace{(1111 \dots 1)}_{n \text{ fois}}_2$

#### PARTIE 2

$$17 = (10001)_2$$
$$165 = (10100101)_2$$

Un nombre palindrome se lit indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche. Ce nombre ne commence jamais par zéro.

On dit que l'an 17 est une « année palindrome binaire » tout comme l'année 165 car les écritures binaires de ces deux nombres sont des palindromes.

L'année 19 n'est pas une « année palindrome binaire » car  $19 = (10011)_2$ .

#### Partie A

- 1) Donner en écriture binaire toutes les « années palindromes binaires » comprises entre l'an 1 et l'an 129
- 2) L'année 2 017 est-elle une « année palindrome binaire » ?
- 3) Trouver la prochaine « année palindrome binaire ».

#### Partie B

On s'intéresse à l'écriture binaire des nombres entiers naturels.

- 1) Combien y a-t-il de palindromes binaires à 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7 chiffres en écriture binaire ?
- 2) Soit  $n$  un entier naturel non nul :  
Déterminer  $P(n)$  le nombre de palindromes binaires à  $n$  chiffres dans chacun des deux cas suivants :  
(on donnera une expression de  $P(n)$  en fonction de  $n$ )
  - a) dans le cas où  $n$  est pair.
  - b) dans le cas où  $n$  est impair.

#### Partie C

On cherche le nombre  $F(2^n)$  de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre  $2^n$  avec  $n$  un entier naturel non nul.

- 1) Déterminer  $F(2^5)$  et  $F(2^6)$
- 2) Montrer que le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à  $2^n$  est :
  - a)  $F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2$  si  $n$  est pair.
  - b)  $F(2^n) = 3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$  si  $n$  est impair.
- 3) Soit  $x$  un nombre entier naturel quelconque strictement supérieur à 5.  
On note  $F(x)$  le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à  $x$ .  
On appelle  $n$  le nombre entier tel que  $2^n \leq x < 2^{n+1}$ 
  - a) Justifier que  $F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$
  - b) Montrer que  $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$