Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 2 (*Ensembles arithmétiques*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 3 (*Boules de même couleur*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Ensembles arithmétiques

Un ensemble S de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple (a,b) avec a et b appartenant à S, il existe un élément c de S tel que l'un des nombres a, b ou c est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers n strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant n éléments.

1. *a.* Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$S_1 = \{0,1,2\}$ $\quad S_2 = \{0,1,2,3\}$ $\quad S_3 = \{0,1,2,4\}$ $\quad S_4 = \left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right\}$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

2. *a.* Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple (a,b) d'éléments de S ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble S est encodé sous la forme d'une liste S = [S[1],..,S[n]] de taille n. Par exemple la moyenne arithmétique du $i$ème et du $j$ème élément de S s'écrit (S[i]+S[j])/2.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
        Resultat ← Vrai
        Pour i de 1 à n
                Pour j de 1 à n
                [...]
                Fin Pour
        Fin Pour
        Renvoyer(Resultat)
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient(r,S) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel r appartient à la liste S et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si S =[S[1],..,S[n]] est un ensemble arithmétique de longueur n.

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit n un entier strictement supérieur à 2 et S un EA ayant n éléments dont le plus grand est noté M et le plus petit m. Aux éléments a de S, on associe les nombres $\frac{2(a-m)}{M-m}$. On constitue ainsi l'ensemble S'. Démontrer que S' est un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

Démontrer que pour tout nombre réel x:

- Si x appartient à S et $0 < x < 1$ alors $\frac{x+2}{2}$ appartient à S ;
- Si x appartient à S et $1 < x < 2$ alors $\frac{x}{2}$ appartient à S.

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément a_1 de S tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, alors il existe un élément a_2 de S tel que $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.

En déduire que S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. Démontrer, de façon analogue, que S ne contient aucun nombre strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

c. En déduire que $n \leq 5$.

6. Quels sont les entiers n pour lesquels il existe un EA ayant n éléments ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

Boules de même couleur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.
b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a-b)^2$.
b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.
c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.
a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.
b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.
c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
Démontrer que la configuration $(1, 3, 9, \ldots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.

Exercice académique n°1 à traiter par tous les candidats

Les sauts de grenouilles

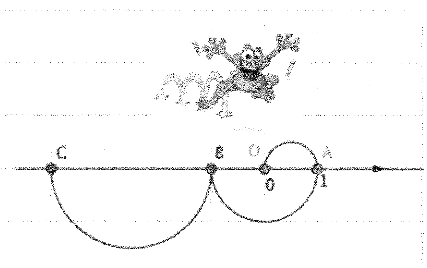
Partie A

Une grenouille se déplace sur un axe gradué. Elle part de l'origine O d'abscisse zéro puis effectue un certain nombre de sauts que l'on note N. À chaque saut, elle avance ou recule d'une unité, de façon équiprobable. On appelle abscisse finale, la position de la grenouille à l'issue des sauts consécutifs qu'elle a effectués.

1. Dans cette question, la grenouille effectue quatre sauts consécutifs, on a donc N=4.
   a. Quel est l'ensemble des abscisses finales possibles ?
   b. Quelle est la probabilité que l'abscisse finale soit égale à 0, c'est-à-dire que la grenouille revienne à sa position initiale ?
   c. Calculer la probabilité de chaque abscisse finale possible.
2. Quel est l'ensemble des abscisses finales possibles lorsque N est égal à 5 ?
3. Dans cette question, on considère que la grenouille effectue N sauts. Pour quelles valeurs de N, la grenouille peut-elle revenir à l'origine après les N sauts, ce qui signifie que l'abscisse finale vaut zéro ?

Partie B

Dans cette partie, la grenouille part de l'origine puis effectue N sauts dans un sens ou dans l'autre sur un axe gradué. De plus, on suppose que la longueur augmente d'une unité à chaque saut.
Le premier saut est de longueur 1, le deuxième saut est de longueur 2 etc…



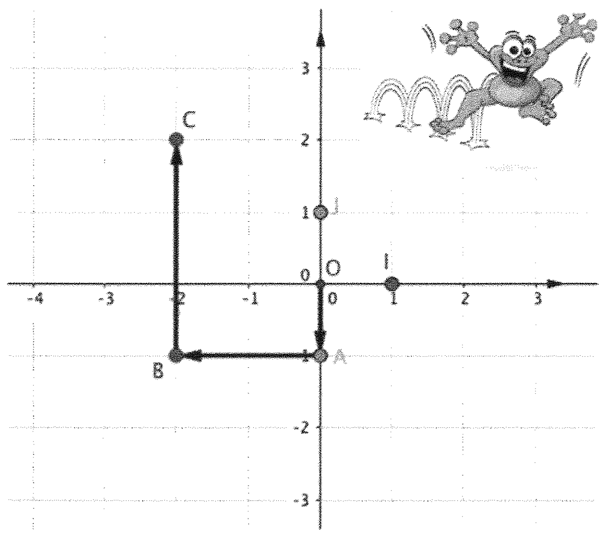
Ci-contre un exemple pour N=3.
La grenouille part de l'origine d'abscisse zéro. Après un premier saut, elle se trouve en A, après le deuxième saut elle est en B, puis à la fin de son troisième saut elle s'arrête en C.

1. Après deux, trois ou quatre sauts, la grenouille peut-elle revenir à l'origine, c'est-à-dire l'abscisse finale peut-elle valoir zéro ?
2. Même question dans le cas où la grenouille effectue cinq sauts.
3. Montrer que si la somme des longueurs des sauts est un nombre impair alors l'abscisse finale ne peut pas être égale à zéro.
4.
   a. Montrer que la somme des longueurs des sauts est paire si et seulement si N est divisible par 4 ou N+1 est divisible par 4.
   b. Montrer que si N ou N+1 est divisible par 4, la grenouille peut revenir à l'origine après N sauts.

Partie C

Une grenouille se déplace par sauts dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I, J) selon les règles suivantes :

- Elle part du point O et n'occupe que des points à coordonnées entières (nœuds du quadrillage).
- Les sauts s'effectuent alternativement dans la direction de chacun des axes (OI) et (OJ) en commençant par l'une ou l'autre des deux directions.
- À chaque saut la longueur augmente d'une unité.



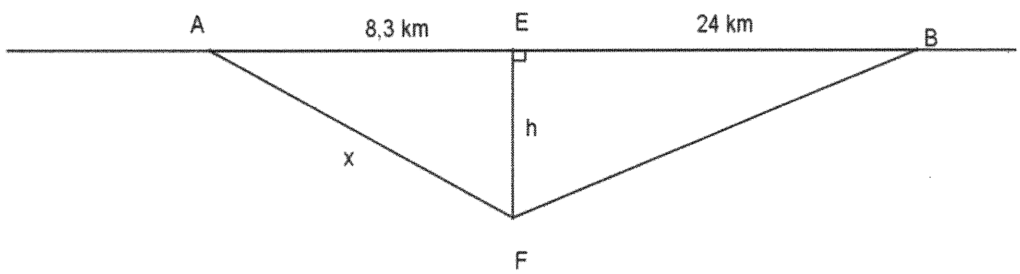
1. On suppose qu'à l'issue du troisième saut, la grenouille est en C après avoir occupé les positions A et B comme indiqué sur la figure ci-dessus.
Donner les coordonnées des points qu'elle est susceptible d'atteindre à l'issue du quatrième saut.

2. Prouver que la grenouille ne peut jamais atteindre un point dont les coordonnées sont toutes deux des nombres impairs.
3. La grenouille part du point O. Déterminer un chemin de sept sauts consécutifs qui la ramène au point O.
4. Montrer que si N ou N+1 est divisible par 8, alors il existe un chemin de N sauts consécutifs qui ramène la grenouille au point O.
5. On suppose que ni N, ni N+1 ne sont divisibles par 8. Montrer qu'alors la grenouille ne peut pas retourner au point O après N sauts.

Exercice académique numéro 2 à traiter par tous les candidats

Partie A : Déterminer la profondeur du foyer d'un séisme

Un séisme est observé dans une station A située à 8,3 km de l'épicentre E, puis 2 secondes plus tard dans une station B située à 24 km de l'épicentre.
Les ondes enregistrées partent du foyer F et se propagent en ligne droite dans toutes les directions à une vitesse de 6,5 km.s^{-1}.
On note x la distance AF entre la première station et le foyer du séisme, et h la profondeur du foyer F du séisme, exprimées en km.
On suppose que (EF) et (AB) sont perpendiculaires et que A, E et B sont alignés.



1. Montrer que la distance FB, exprimée en km, entre la deuxième station et le foyer du séisme est égale à $x + 13$.
2.
   a. Montrer que $h = \sqrt{x^2 - 68{,}89}$
   b. Montrer que $h = \sqrt{(x+13)^2 - 576}$
   c. En déduire les valeurs de x et h.

Partie B Localiser un séisme

Un séisme a été enregistré le 3 janvier 2018 aux stations de Montbéliard, Valdahon et Baume-les-Dames. Ces trois stations ont enregistré deux ondes différentes :

- Les ondes P qui ont une vitesse moyenne de 6,5 km.s^{-1},
- Les ondes S qui ont une vitesse moyenne de 4 km.s^{-1}.

Ces deux ondes ont été produites au même moment au foyer du séisme.
Le tableau ci-dessous récapitule les heures de réception de ces deux ondes dans les stations.

Ville	Ondes P	Ondes S
Montbéliard	2 h 45 min 30,277 s	2 h 45 min 34,200 s
Valdahon	2 h 45 min 27,806 s	2 h 45 min 30,185 s
Baume-les-Dames	2 h 45 min 27,000 s	2 h 45 min 28,875 s

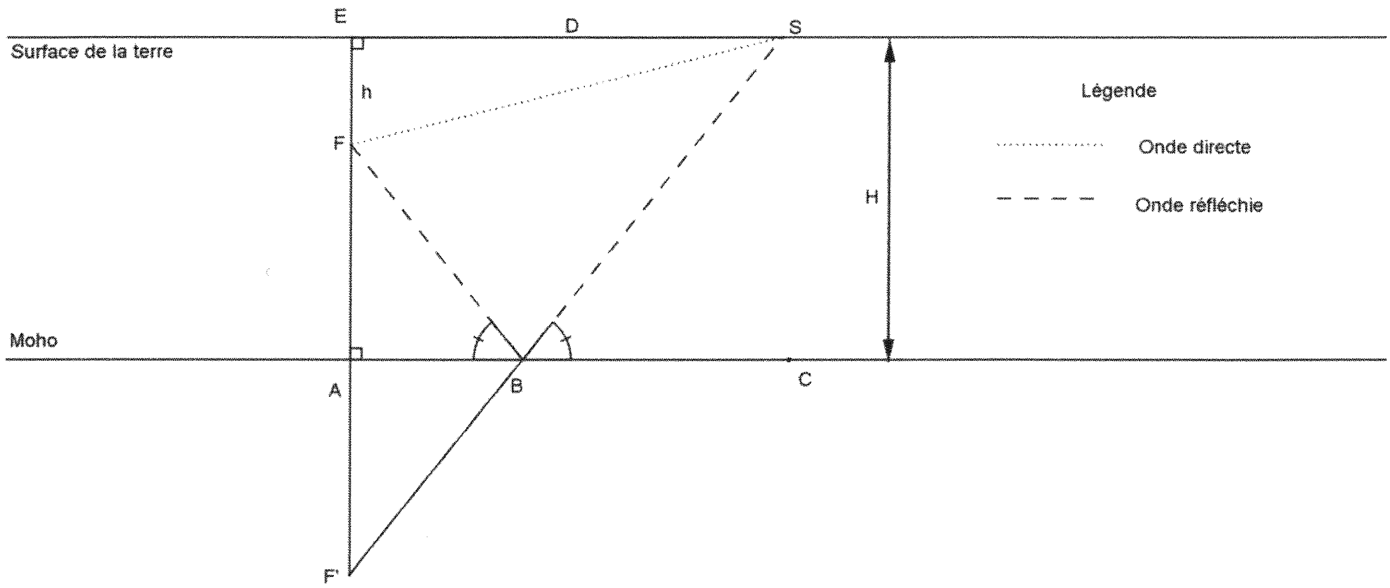
Les points M, V, B et F désigneront dans cette partie les positions respectives de Montbéliard, de Valdahon, de Baume-les-Dames et du foyer du séisme.
Avec ces notations, on sait que : $VM = 60$ km, $BM = 48$ km, $VB = 36$ km.

1.
   a. Déterminer l'heure du séisme (à 10^{-3} seconde près).
   b. Déterminer les distances entre le foyer du séisme et chacune de ces villes (à 10^{-2} km près).
2.
   a. Dessiner le triangle VMB. On prendra 1 cm pour représenter 12 km.
   b. Déterminer l'aire du triangle VMB.
3. Connaisant les longueurs des arêtes du tétraèdre VMBF, on peut montrer que son volume est 2016 km^3. En déduire la profondeur du séisme, c'est-à-dire la hauteur du tétraèdre.
4. En déduire la distance entre l'épicentre du séisme et chacune des villes.
5. Placer l'épicentre E du séisme sur la figure de la question 2.a.

Partie C : Déterminer l'épaisseur de la croûte continentale

Pour déterminer l'épaisseur de la croûte continentale, nous allons utiliser le fait que les ondes sismiques se réfléchissent sur le Moho (la limite inférieure de la croûte continentale).

Dans la figure ci-dessous, le foyer du séisme F émet des ondes dans toutes les directions. La station située en S reçoit des ondes directes, qui se sont déplacées en ligne droite et les ondes qui se sont réfléchies en B.



On note E l'épicentre du séisme, $h = EF$ la profondeur du foyer, $D = ES$ la distance entre la station et l'épicentre, B le point de réflexion de l'onde sismique, A l'intersection entre le Moho et la droite (EF) et C un point de $[AB)$ qui n'est pas sur $[AB]$. On note également F' le symétrique de F par rapport à A.

On admet que les droites (EF) et (ES) d'une part et (EF) et (AB) d'autre part sont perpendiculaires. On admet également que les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{CBS}$ sont de même mesure et que l'onde se déplace à une vitesse v constante.

On note $H = EA$ la hauteur de la croûte continentale.

La station S a enregistré un séisme dont l'épicentre est situé à une distance $D =$ 25 km de la station. Le foyer du séisme est situé à une profondeur $h = 10$ km sous l'épicentre et la station a enregistré les ondes directes 4,46 secondes avant les ondes réfléchies.

On sait que les ondes se propagent à une vitesse de 6,5 km.s^{-1}.

Déterminer la hauteur H de la croûte continentale.