Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 2 (*Premières fois*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 3 (*AGADADAGA*).

CASIO Crédit Mutuel Enseignant Texas Instruments
Inria Animath Google
hp École Polytechnique Université Paris-Saclay

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. *a.* Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

$(4, 4, 5)$; $(3, 6, 9)$; $(2, 2, 6)$

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1,4,4), (2,3,4), (3,3,3)\}$.
a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?
b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. *a.* Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x+1, y+1, z+1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x-1, y-1, z-1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.
a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?
b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?
c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038(x+y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}.$$

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et j le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »

En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.
De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Premières fois

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas. On rappelle le théorème de décomposition *en produit de facteurs premiers :*
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel k, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels
On souhaite si possible déterminer une fonction $\Delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :
Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;
Propriété (2) : Pour tout nombre premier p, $\Delta(p) = 1$;
Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.

On suppose en questions **1**, **2** et **3** qu'une telle fonction Δ existe.
1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$? Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?
2. *a.* Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?
b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$?
3. À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1, q_2 de n par p_2,... , q_k quotient de n par p_k. Montrer qu'alors :

$$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$$

4. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus. Cette expression, alliée à la convention portée dans la propriété (1), définit donc une unique fonction Δ convenable.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.
5. *a.* Calculer $\Delta(12), \Delta(56), \Delta(1\,001)$.
b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?
c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?
d. Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?
e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel n, $\Delta(n) \leq n$?
6. *a.* Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.
b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?
7. *a.* Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?
b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k. Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ
8. *a.* Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p.
b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.
9. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

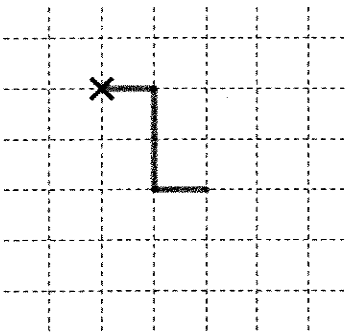
AGADADAGA

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G. Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.
Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau *mot*.
Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le *mot* AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau *mot*, et ainsi de suite.

1. Quels sont les mots qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

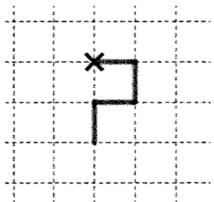
Traitement de texte
Astrid rentre le *mot* A.
2. Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?
3. Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?
4. Après 20 clics, combien le mot obtenu contient-il de lettres D ?

Motif
Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier mot obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :

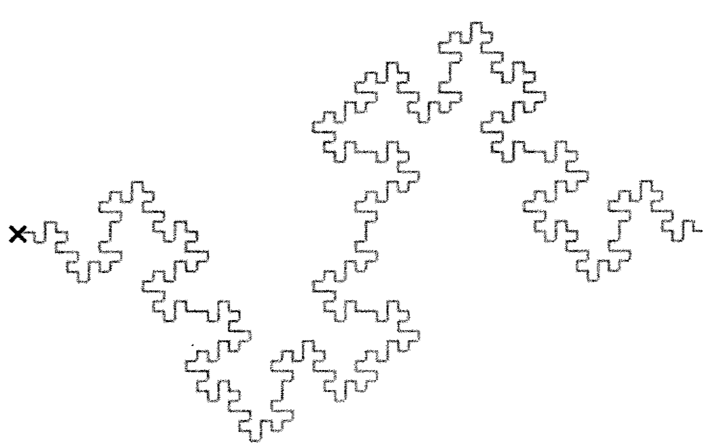


- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté à gauche.



5. Astrid a réalisé le motif de droite. Quel *mot* avait-elle obtenu ?
6. Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.
7. Astrid reprogramme le logiciel et remplace le mot AGADADAGA par un autre mot dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le mot A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le mot oublié par Astrid ?



8. On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle *largeur* du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.
a. Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?
b. Un *mot* conforme à l'hypothèse du **8.** comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2019

SUJETS ACADEMIQUES

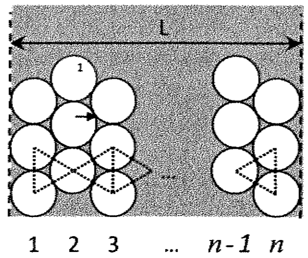
Les candidats traitent **deux exercices**.

Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (rangement optimal de boites dans les casiers) et 2 (se suivre sans perdre un chiffre).

Les autres traitent les exercices numéros 1 (rangement optimal de boites dans les casiers) et 3 (triangles en somme).

RANGEMENT OPTIMAL DE BOITES DANS DES CASIERS

Partie 1 : *Recherche d'une disposition efficace*



1) a) Soit h la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2, montrer que $h = \sqrt{3}$.

b) On considère n colonnes de disques tangents de rayon 1 dans la disposition ci-contre. Montrer que la longueur L occupée par ces n colonnes est égale à $2 + (n-1)\sqrt{3}$

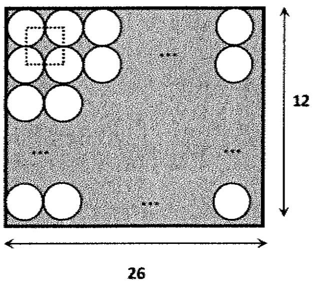
2) Application :

Un commerçant souhaite ranger des boîtes cylindriques de rayon 1 dans un casier rectangulaire de longueur 26 et de largeur 12. En partant du coin supérieur gauche il dispose côte à côte, en lignes ou en colonnes, le plus grand nombre possible de boîtes.

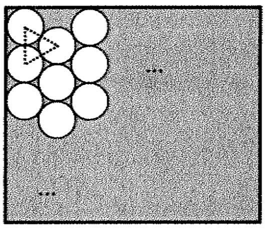
Dans la suite du problème, les boîtes sont représentées par des disques de rayon 1.

Le commerçant hésite entre les trois dispositions suivantes (échelle non respectée) :

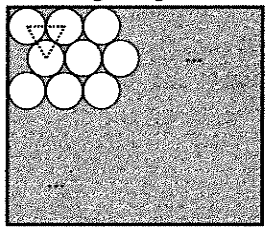
Disposition 1:
"en carrés"



Disposition 2:
"en triangles colonnes"



Disposition 3:
"en triangles lignes"



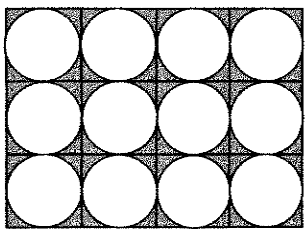
Attention :
Les disques situés en bout de lignes ou de colonnes ne touchent donc pas nécessairement les bords du casier.

Déterminer la disposition permettant de ranger le plus grand nombre de boîtes.

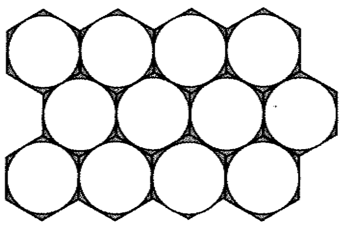
Partie 2 : *Estimation de la proportion de l'aire occupée par les disques :*

On a circonscrit les disques par des polygones (afin de paver l' « intérieur » du casier)

Par des carrés pour la disposition 1 :



Par des hexagones réguliers pour les dispositions 2 et 3 :



On admettra que, pour des casiers de « grandes dimensions », la proportion de l'aire totale occupée par les disques dans les casiers « se rapproche » de : $P = \dfrac{Aire\ d'un\ disque}{Aire\ d'un\ polygone}$.

1) Déterminer la valeur exacte de P pour la disposition 1 puis pour les dispositions 2 et 3

2) Donner une estimation du nombre n de boîtes que l'on peut ranger dans de « grands » casiers en fonction de l'aire S du casier (on envisagera les cas de la disposition 1 puis des dispositions 2 et 3).

Partie 3 : *Une disposition plus efficace :*

On considère un casier rectangulaire de longueur 444 et de largeur 4.

Trouver une nouvelle disposition permettant de ranger 445 boîtes (on représentera cette nouvelle disposition par un schéma puis on déterminera le nombre de boites par le calcul).

Se suivre sans perdre un chiffre

Soit $k \geq 1$ un nombre entier. Pour tout entier naturel $a \geq 0$, on dit que la suite $(a, a+1, a+2, \ldots, a+n-1)$ de n nombres entiers consécutifs est k-complète de longueur n si ces n nombres ont chacun k chiffres et que chaque chiffre de 0 à 9 apparaît au moins une fois dans l'écriture décimale de l'un d'eux.

Par exemple, la suite (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19) est 2-complète de longueur 10, tandis que (34, 35, 36, 37, 38) n'est pas 2-complète car les chiffres 0, 1, 2 et 9 n'apparaissent dans aucun entier de cette suite.

On dit qu'une suite k-complète est **minimale** s'il n'existe pas de suite k-complète de longueur strictement inférieure. Par exemple, la première suite 2-complète donnée en exemple n'est pas minimale car (90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98) est elle aussi 2-complète, de longueur 9. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ces suites k-complètes minimales, et de les dénombrer.

Dans ce problème, l'écriture décimale d'un entier non nul ne commencera jamais par le chiffre 0.

§1. Longueur minimale d'une suite k-complète

Question 1. Dans cette question, $k = 1$: on considère des nombres entiers à un chiffre.

a) Écrire toutes les suites 1-complètes possibles. Aucune justification n'est attendue.

b) En déduire le nombre de suites 1-complètes minimales ainsi que leur longueur.

Question 2. Soit $k \geq 10$. Proposer une suite k-complète minimale, et indiquer sa longueur.

Question 3. Donner la longueur minimale d'une suite 9-complète. Justifier.

Question 4. Dans cette question, $k = 3$.

a) Donner un exemple de suite 3-complète de longueur 7.

b) Expliquer pourquoi aucune suite de 6 entiers consécutifs comportant trois chiffres ne peut être 3-complète, en justifiant soigneusement.

Question 5. On considère dans cette question que le nombre k de chiffres vérifie $2 \leq k \leq 8$. Démontrer que les suites k-complètes minimales sont de longueur $10 - k$.

§2. Dénombrement des suites k-complètes minimales

Question 1. Combien de nombres entiers à dix chiffres peut-on écrire en utilisant une et une seule fois chaque chiffre de 0 à 9 ? Justifier (on pourra commencer par déterminer le nombre de possibilités pour le chiffre le plus à gauche). En déduire le nombre de suites 10-complètes minimales.

Question 2. Soit $k = 4$. On considère une suite 4-complète minimale quelconque, commençant par l'entier a. Cette suite est donc de longueur 6.

a) Montrer que le chiffre des dizaines ne peut pas être le même pour tous les nombres d'une suite 4-complète minimale. En déduire les chiffres des unités possibles pour l'entier a.

b) Déterminer le nombre de possibilités pour le chiffre des dizaines de l'entier a, en fonction de son chiffre des unités.

c) Déterminer le nombre de possibilités pour les chiffres des centaines et des milliers de l'entier a, en sachant que la suite de 6 entiers consécutifs commençant par a est 4-complète minimale.

d) Démontrer qu'une telle construction donne bien toujours le premier nombre entier d'une suite 4-complète minimale.

e) Déterminer le nombre de suites 4-complètes minimales.

Question 3. Soit $2 \leq k \leq 8$. Démontrer que le nombre de suites k-complètes minimales est : $(9-k) \times 2 \times 3 \times \cdots \times (k-1)$.

Question 4. Montrer que le nombre de suites 9-complètes minimales est 579 600.

Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats AUTRES que la série S)

Triangles en somme

On construit des triangles de la façon suivante :

- n étant un entier naturel non nul, on écrit sur la première ligne les entiers naturels consécutifs de 1 à n.
- À partir de la deuxième ligne, on place les entiers obtenus en faisant la somme des deux entiers situés au-dessus.
- On s'intéresse au nombre isolé qui sera situé à la dernière ligne du triangle. On désigne par S_n ce dernier nombre.

L'objectif du problème est de calculer S_{2019}.

1) Étude sur quelques exemples.

Voici les premiers triangles obtenus pour $n = 2, n = 3, n = 4$.

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1 2 3	1 2 3 3 5 8	1 2 3 4 3 5 7 8 12 20

a) Donner pour chacun d'eux le nombre S_n correspondant.

b) Construire les triangles obtenus pour $n = 5$ puis $n = 6$. Donner leur nombre de lignes ainsi que les valeurs de S_5 et S_6.

2) Construction des lignes

La première ligne d'un triangle est construite de la façon suivante :

$$1\ 2\ 3\ \ldots.\ \ p-1\ \ p\ \ p+1\ \ \ldots\ldots\ n-1\ \ n$$

où $p-1$, p ,$p+1$ désignent trois entiers naturels consécutifs.

a) Justifier que dans la deuxième ligne du triangle, la différence entre deux entiers placés côte à côte est égale à 2.

b) Justifier que dans la troisième ligne du triangle, la différence entre deux entiers consécutifs placés côte à côte est égale à 4.

c) Expliquer que, dans ligne numéro p du triangle, la différence entre deux entiers placés côte à côte est égale à 2^{p-1}.

d) On remarquera que chaque ligne possède un nombre en moins que la ligne placée au-dessus, et que chaque ligne numéro p commence par S_p. (On ne demande pas de démontrer ce résultat).

On suppose que la ligne numéro 1 possède n nombres entiers. Combien de nombres contient la ligne numéro p. Justifier.

e) En déduire que sur ligne numéro p du triangle, on trouve de gauche à droite les nombres :

$$S_p \ , \quad S_p + 2^{p-1}, \quad S_p + 2 \times 2^{p-1}, \quad \dots \ , S_p + (n-p) \times 2^{p-1}$$

3) Algorithme permettant d'obtenir S_n.

a) Déterminer une relation exprimant S_n en fonction de S_{n-1}.

b) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche en sortie le nombre S_n

```
Saisir une valeur pour N
S ← ........
Pour k allant ..........
    S ←..........
Fin Pour
Afficher S
```

c) Utiliser votre calculatrice pour calculer S_{20}.

4) Calcul de S_{2019}.

a) À l'aide de la relation obtenue à la question 3 a), démontrer que pour tout $n \geq 2$, S_n est divisible par 2^{n-2}.

b) Déterminer une relation exprimant S_n en fonction de n.

Vérifier votre formule avec S_6 et S_{20}.

c) En déduire la valeur exacte de S_{2019}.