MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

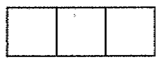
Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

Batailles navales

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geq 3$.
Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier.
Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.



Le bateau est invisible du joueur.

Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle *« jeu optimal »* un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathrm{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathrm{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$

a. Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?

b. Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.

c. Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.

d. En déduire que $\mathrm{J}(3) = 3$.

2. Cas où $n = 4$

a. Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{J}(4)$?

b. Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathrm{J}(4)$.

3. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathrm{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geq 1$ ·

a. Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathrm{J}(3p)$?

b. En utilisant le schéma proposé en **A1.b**, expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.

c. Montrer que $\mathrm{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geq 1$

a. Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateau disjointes deux à deux ?

b. Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.

c. Que vaut $\mathrm{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathrm{J}(n)$, pour tout entier $n \geq 3$.
On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $\mathrm{J}(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathrm{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{n^2}{3}$.

b. Existe-t-il un entier n tel que $\mathrm{J}(n)$= 2020 ?

Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Ensembles surprenants

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Dans tout l'exercice, les ensembles considérés sont des sous-ensembles finis non vides de $\mathbb{N}^*$.
Si A est un tel ensemble, on désigne par $P(A)$ le produit des éléments de A et par $C(A)$ la somme des carrés des éléments de A.
Par exemple, si $A = \{1, 2, 5\}$, alors $P(A) = 1 \times 2 \times 5 = 10$ et $C(A) = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30$.

On dit qu'un ensemble fini A est *surprenant* si $P(A) = C(A)$.

1. Deux exemples.
a. L'ensemble $\{1, 2, 3, 2020\}$ est-il surprenant ?
b. L'ensemble $\{6, 15, 87\}$ est-il surprenant ?

2. On considère un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geq 5$.
a. Quels sont les nombres x vérifiant l'égalité

$$xP(A) = P(A) - 1 + x^2 \text{ ?}$$

b. Montrer que le nombre $P(A) - 1$ n'appartient pas à A.
c. On note A' l'ensemble obtenu en ajoutant l'entier $P(A) - 1$ à l'ensemble A. En d'autres termes,

$$A' = A \cup \{P(A) - 1\}.$$

Exprimer $P(A') - C(A')$ en fonction de $P(A) - C(A)$.
d. En déduire que si $P(A) > C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.
e. Trouver un ensemble surprenant contenant l'ensemble $\{3, 4, 9\}$.

3. On considère à nouveau un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geq 5$.
a. Prouver que le nombre $P(A) - 2$ n'appartient pas à A.
b. En déduire que si $P(A) < C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

4. En déduire finalement que, pour tout sous ensemble fini non vide A de $\mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble surprenant B qui contenant A.

5. Montrer qu'on peut trouver un ensemble surprenant ayant 67 éléments et contenant $A = \{1, 2, 5\}$.

Exercice national 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

Le chiffre de César ou le chiffrement par décalage est une méthode de chiffrement très simple utilisée par Jules César dans ses correspondances secrètes. Le texte chiffré s'obtient en décalant chaque lettre d'un nombre fixe, appelé clé, dans l'ordre de l'alphabet.

Par exemple avec une clé de 3 vers la droite, A est remplacé par D, B devient E, et ainsi jusqu'à W qui devient Z, puis X devient A etc.

1. Coder le mot suivant avec la clé 3 : OLYMPIADES
2. Décoder le message suivant, chiffré par la méthode de César avec la clé 9 : JWWNN MNB VJCQNVJCRZDNB
3. Décoder les trois parties du texte suivant, chiffré par la méthode de César, dont la clé est à deviner :

Texte 1 : signé Alan Turing

Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *qmppi riyj girx hsydi*, la cryptographie me passionne. Le décodage est simpliste même si *Tcxleksvi ri ey wmbmiqi wmigpi ezerx Niwyw Glvmwx* l'aurait trouvé brillant.

Eper Xyvmrk

Soit a et b deux nombres entiers. Le cryptage affine consiste à remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre, en commençant par 0 pour la lettre A, 1 pour la lettre B... jusqu'à 25 pour la lettre Z, puis à remplacer le nombre initial x par le nombre y qui est le reste de la division euclidienne de $a\,x + b$ par 26. Le couple $(a;\ b)$ forme la clé du cryptage.

4. Avec la clé $(a\ ;\ b) = (22\ ;\ 4)$, détailler les calculs pour la lettre B.
5. Toujours avec la clé $(a\ ;\ b) = (22\ ;\ 4)$, coder les lettres D et Q. Quel problème pratique engendre l'utilisation de cette clé ?
6. On change de clé : on prend $(a\ ;\ b) = (9\ ;\ 4)$.

Dans l'algorithme ci-contre, m % 26 désigne le reste de la division euclidienne de m par 26. Par exemple, 28 % 26 $= 2$.

Cet algorithme permet de remplir le tableau de la question a.

```
Entrer a
Entrer b
x ← 0
Tant que x < 26
       m ← ax +b
       y ← m % 26
       Afficher x, y
       x ← x + 1
Fin tant que
```

a. Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter pour tout l'alphabet.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	....
Rang x	0	1	2	3	4	5	...	...	...	....
$m = ax + b$	4									
Rang y	4									
En crypté	E									

b. La clé $(9\ ;4)$ résout elle le problème rencontré à la question 5 ?

7. Décoder la partie du texte suivant, codé avec la clé $(a;\ b) = (9;\ 4)$

Texte 2

Le mot algorithme tire son origine de *Ez-Qpeuebyviy ro or kojt wort scetbo lyrgtk*, père de l'algèbre.

8. Proposer un algorithme de décodage. Toute trace de recherche sera prise en compte.

9. Quel est le principal défaut des deux systèmes de codage vus précédemment ?

On peut reprendre le chiffre de César de la partie 1 en changeant de clé pour chaque lettre. Ce chiffrement, le chiffrement de Vigenère, introduit la notion de clé, qui peut se présenter sous forme d'un mot ou d'une phrase. On choisit par exemple le mot clé VIGENERE, ce qui donnera :

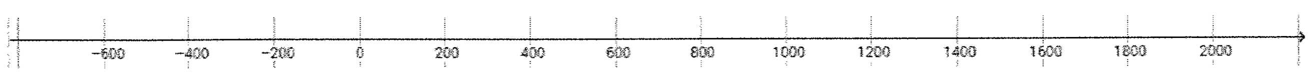
- la clé 21 (lettre V) pour la 1^re^ lettre du message à coder,
- la clé 8 (lettre I) pour la 2^e^ lettre,
- la clé 6 (lettre G) pour la 3^e^ lettre, etc...
- la clé 4 (lettre E) pour la 8^e^ lettre puis on recommence avec la clé 21 (lettre V) pour la 9^e^ lettre, etc.

10. Décoder avec cette clé la date de naissance de Blaise Vigenère.

Texte 3

HQRPR GZRL KKRG ZZRBB-ZVBMJ

11. Remplir la frise ci-dessous avec les noms des trois mathématiciens évoqués dans les textes précédents ainsi que leur année de naissance, parfois approximative.



OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES 2020

SUJETS ACADEMIQUES

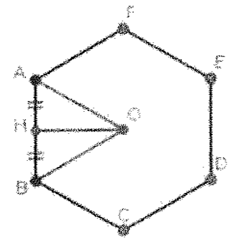
Exercice académique à traiter par tous les candidats

Problèmes d'isopérimétrie

On définit le rapport isopérimétrique d'une figure fermée du plan comme étant le quotient du carré de son périmètre par son aire. Autrement dit, pour une figure de périmètre P et d'aire A, son rapport isopérimétrique est défini par $Q = \frac{P^2}{A}$.

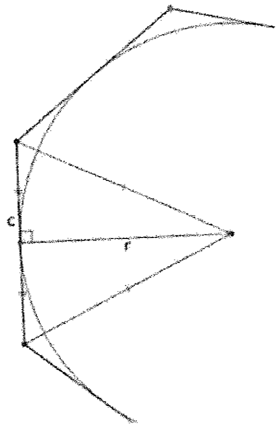
Partie A

1. Étude des triangles équilatéraux.
   a) Tracer un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est 4 cm et calculer son rapport isopérimétrique.
   b) Déterminer le rapport isopérimétrique d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est c. Vérifier que son expression ne dépend pas de c.
2. Donner l'expression du rapport isopérimétrique d'un carré dont la longueur des côtés est c.
3. On a tracé ci-contre un hexagone régulier de centre O et de côté de longueur c. Calculer son rapport isopérimétrique.
   Indication : l'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux.



Partie B

1. On considère un polygone régulier à n côtés de longueur c et on note r le rayon de son cercle inscrit. Exprimer l'aire, le périmètre et le rapport isopérimétrique de ce polygone en fonction de c, r et n.
2. En comparant l'aire du polygone régulier et l'aire du disque de rayon r inscrit dans ce polygone, établir l'inégalité $\frac{nc}{2} \geq \pi r$ et en déduire que $Q \geq 4\pi$.



Partie C

1. On s'intéresse à un triangle isocèle dont deux côtés sont de longueur c et le troisième est de longueur $2d$.
   a) Démontrer que $c > d$.
   b) Démontrer que son rapport isopérimétrique est égal à $Q = \frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}$.
   c) Montrer que pour $c=2d$, on a $Q = 12\sqrt{3}$.
   d) Démontrer que
   $$Q^2 - (12\sqrt{3})^2 = \frac{16(c-2d)^2(7d^2+8cd+c^2)}{d^2(c^2-d^2)}.$$
   e) En déduire que le rapport isopérimétrique d'un triangle isocèle quelconque est toujours supérieur ou égal à celui de tout triangle équilatéral.
2. On considère un triangle quelconque ABC. On trace la droite (d) parallèle à (AB) passant par C, et on place un point C' sur (d).
   a) Démontrer que, quelle que soit la position du point C' sur (d), les triangles ABC et ABC' ont la même aire.
   b) Démontrer que, si ABC' est isocèle en C', alors $AC + CB \geq AC' + BC'$.
   Indication : on pourra considérer le symétrique de B par rapport à (d).
   c) Déduire des questions précédentes que tous les triangles vérifient $Q \geq 12\sqrt{3}$, et donc $Q \geq 4\pi$.
3. Tracer un triangle de rapport isopérimétrique supérieur à 2020.

Exercice académique à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques

Les mendiants généreux

Un voyageur sans un sou en poche se promène dans une ville imaginaire et rencontre des mendiants.

Le premier mendiant lui demande 1€, le voyageur, navré, lui répond qu'il n'a aucun euro en poche.

Le mendiant lui dit alors : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 1€ ».

Le voyageur repart un peu confus et étonné d'avoir maintenant 1€ en poche. Il rencontre un 2ème mendiant qui lui demande 2€. Le voyageur, navré, lui dit qu'il n'a qu'un euro en poche, ce à quoi le mendiant répond : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 2€ ».

Le voyageur poursuit son chemin avec 3€ en poche et rencontre un 3ème mendiant qui lui demande 3€. Ravi de les avoir, le voyageur lui donne les 3€ qu'il a en poche et continue son chemin sans argent.

Un peu plus loin, il rencontre un 4ème mendiant qui lui demande 4€…

L'histoire se poursuit ainsi : Lorsque le voyageur rencontre le n-ième mendiant, celui-ci lui demande n euros. Si le voyageur les possède, il les lui donne, sinon, c'est le mendiant qui les lui donne.

Pour tout entier n, avec $n \geq 0$, on appelle u_n la somme d'argent en euro, que possède le voyageur après avoir rencontré le n-ième mendiant. On a donc : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 0$.

On définit ainsi une suite (u_n).

1°) Donner les termes de la suite (u_n) pour n allant de 4 à 10.

2°) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir les sommes d'argent, en euro, que possède le voyageur jusqu'au 50ème mendiant rencontré.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

4°) a) Démontrer que si $1 \leq u_n \leq n$ alors $u_{n+2} = u_n - 1$
b) Démontrer que si $n + 1 \leq u_n \leq 2n$ alors $u_{n+2} = u_n + 1$

5°) a) Démontrer que si $u_n = 0$ alors $u_{3n+3} = 0$
b) En utilisant le fait que $u_0 = 0$, trouver six autres termes de la suite (u_n) valant 0.

6°) On admet que pour tout $p \geq 1$, $S_p = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^p = \frac{3^{p+1} - 3}{2}$
Démontrer que si $n = \frac{3^{p+1} - 3}{2}$ avec p entier positif quelconque, alors $u_n = 0$

7°) a) Ecrire 1092 sous la forme d'une somme de puissances successives de 3.
b) En déduire la somme d'argent, en euro, possédée par le voyageur après avoir rencontré le 2020ème mendiant.

8°) En remarquant que $S_7 = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3279$, déterminer un entier n tel que $u_n = 2020$.

9°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{3n+1} = 3u_n + 1$.

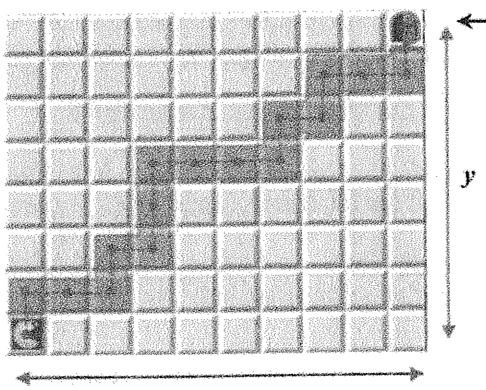
Exercice académique à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques de voie générale

Problème « Jeu vidéo »

Un jeu vidéo est constitué d'une grille rectangulaire de x cases par y cases, x et y étant des entiers naturels non nuls (dans l'exemple d'illustration ci-dessous on a $x = 10$ et $y = 8$). Un personnage se trouvant en bas à gauche de la grille (case « départ ») doit rejoindre une porte située en haut à droite (case « arrivée ») en se déplaçant suivant deux directions : vers le haut ou vers la droite.

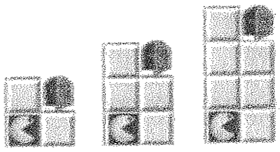
On appelle « chemin » l'ensemble des cases empruntées par le personnage (un exemple de chemin a été tracé ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier le nombre de chemins possibles entre la case de départ et la case d'arrivée, nombre que l'on notera C(x ; y).

Case « arrivée »



Case « départ »

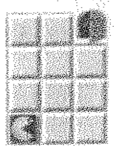
1) Etude de premiers cas de C(x ; y) , $x \geq 1$ et $y \geq 1$:



a. Soit y quelconque. Donner la valeur de C(1 ; y) .

b. Donner les valeurs de C(2 ; 2) ; C(2 ; 3) ; C(2 ; 4) .

Déterminer C(2 ; y) en fonction de y. Justifier la réponse.

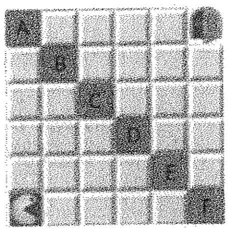


c. Justifier que C(3 ; 4) = C(2 ; 4) + C(2 ; 3) + C(2 ; 2) + C(2 ; 1) puis calculer C(3 ; 4).

On rappelle que $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Préciser C(3 ; y) en fonction de y (en justifiant)

d. Justifier que C(y ; x) = C(x ; y)

2) Calcul de C(6 ; 6) :

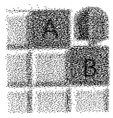


En considérant les chemins passant par les cases A, B, C, D, E ou F de la grille ci-contre :

a. Justifier que C(6 ; 6) = 2 [$C^2(1 ; 6) + C^2(2 ; 5) + C^2(3 ; 4)$]

b. En déduire la valeur de C(6 ; 6)

3) Détermination des C(x ; y) et application à une situation de jeu :



a. En considérant les chemins passant par les cases A et B adjacentes à la porte, montrer que

C(x ; y) = C($x - 1$; y) + C(x ; $y - 1$)

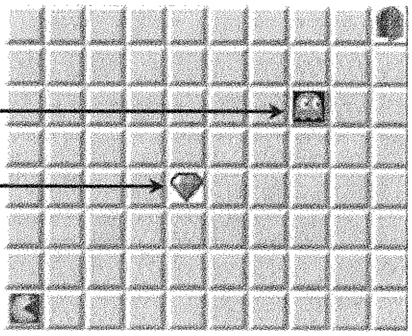
b. Recopier et compléter alors le tableau des C(x ; y) ci-dessous :

6	1					
5	1					
4	1					
3	1					
2	1	2				
1	1	1	1	1	1	1
y / x	1	2	3	4	5	6

c. Application à une configuration de jeu :

Case « fantôme »

Case « diamant »



Le personnage doit rejoindre la case « arrivée » en passant par la case « diamant » et en évitant la case « fantôme ».

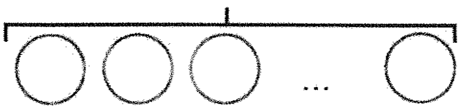
Calculer le nombre de chemins gagnants, c'est-à-dire respectant ces deux contraintes.

4) Recherche explicite des C(x ; y) :

Pour représenter un chemin, chaque déplacement d'une case vers le haut est noté **H** et chaque déplacement d'une case vers la droite est noté **D**.
Ainsi le chemin donné en exemple au début de l'énoncé est représenté par **H D D H D H H D D D H D H D D H .**

On admettra le résultat suivant :

n cases



p *cases à cocher.*

Si on veut cocher p cases parmi n cases (avec $p < n$), le nombre de possibilités est égal à $\dfrac{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times n}{1\times2\times\ldots\times(n-p)}$,
ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

a. Justifier que C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ et en déduire que pour $y \geq 2$, on a C(x ; y) = $\dfrac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Utiliser le résultat précédent pour calculer la valeur de C(10 ; 8) puis déterminer la proportion du nombre de chemins gagnants de la question **3)** par rapport à la valeur C(10 ; 8) (arrondir le résultat à 10^{-4}).

c. Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous permettant de calculer la valeur de C(x ; y) où x et y sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 précisés par l'utilisateur et où C contiendra la valeur de C(x ; y).

$N \leftarrow 1$
$D \leftarrow 1$
Pour k allant de 0 à $y - 2$
N ← N × (………)
D ← D × (………)
C ← …