MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

# Olympiades nationales de mathématiques 2021

## *Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde*

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

# Exercice nationaux

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

## Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

### *Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier*

*On rappelle qu'on nombre entier $m$ est un multiple d'un nombre entier $d$ s'il existe un nombre entier $q$ tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que $d$ est un diviseur de $m$. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier $n$.*

**1.** Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?
**2.** Quelle est la somme des diviseurs de 6? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

À tout nombre entier naturel non nul $n$, on associe le nombre $N(n)$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.
**3.** Pour chacun des nombres $6, 101, 361$, 2 021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

**4.** À tout diviseur $d$ d'un entier $n$ non nul on associe l'entier $q$ tel que $n = dq$. Si les diviseurs de $n$ sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.
***a.*** Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$
***b.*** Si $a$ et $b$ sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

***c.*** En déduire, pour des nombres $d$ et $q$ tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

***d.*** En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel $n$ non nul.

**5. *a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs $d$ de $n$, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

***b.*** En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

***c.*** La réciproque est-elle vraie ?

## Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

## Entiers $N$ − décomposables

On donne un entier $N$ supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel $k$ est $N$ −décomposable s'il existe des entiers naturels $q$ et $r$ tels que :

$$(S)\quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est 21 − décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times 21 + 4 \end{cases}$, le nombre 28 est 64 −décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times 64 + 16 \end{cases}$.

**A. Quelques exemples**

**1. *a.*** Le nombre 7 est-il 22 −décomposable ? Est-il 10 −décomposable ?
***b.*** Le nombre 45 est-il 100 −décomposable ?

**2. *a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1 −décomposables.
***b.*** Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2 −décomposables.

**3.** Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1.
***a.*** Le nombre $N$ est-il $N$ −décomposable ?
***b.*** Prouver que $N - 1$ est $N$ −décomposable.
***c.*** Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas $N$ −décomposable.

**B. Une étude des nombres $N$ −décomposables**

Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1.
**1. *a.*** Prouver que si $k$ est $N$ −décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
***b***. Quels sont les entiers 3 −décomposables ? Quels sont les entiers 4 −décomposables ?

**2.** Prouver que si $N \geq 2$ et si $k$ est $N$ −décomposable, alors il existe un unique couple $(q, r)$ d'entiers vérifiant le système $(S)$.

**3. *a.*** Soit $k$ un nombre $N$ −décomposable. Justifier qu'il existe un entier $q$ compris entre 1 et $k$ tel que $k$ soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$.
***b.*** Prouver que, réciproquement, si $k$ est un entier naturel et qu'il existe un entier $q$ compris entre 1 et $k$ tel que $k$ soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$, alors $k$ est $N$ −décomposable.
***c.*** Soit $p$ un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est $2^{2p}$ −décomposable.

**4.** Prouver que si $k$ est $N$ −décomposable, alors $N - k$ est $N$ −décomposable.

**5.** Dans cette question, on suppose que $N$ est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas $N$ −décomposable.

**6.** Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers $N$ −décomposables.

**7.** Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers $N$ −décomposables.

**8.** On donne un entier $k$ supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $N$ tels que $k$ soit $N$ −décomposable.

## Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

### *Fractions et pyramides égyptiennes*

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

**1.** Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

***a.*** La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

***b.*** Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

***c.*** Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

**2.** On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu'on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.

Par exemple,

- $x = \frac{9}{20}$ a pour décomposition égyptienne $x = \frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.
- $x = \frac{1}{8}$ est déjà une décomposition égyptienne.

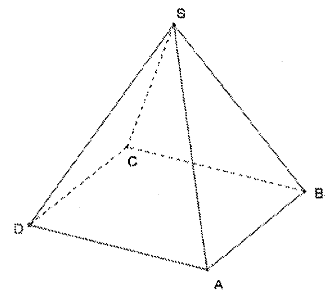
On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.

***a.*** Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel $x$ tel que $0 < x < 1$ ?

***b.*** Donner une décomposition égyptienne de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{9}{10}$.

**3.** On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :

- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.




***a.*** Montrer que la pyramide régulière $SABCD$ à base carrée ci-contre, telle que $\mathrm{AB} = \frac{1}{30}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne

Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de sommet $S$ dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs $AB$ et $SA$ sont des *fractions égyptiennes*.

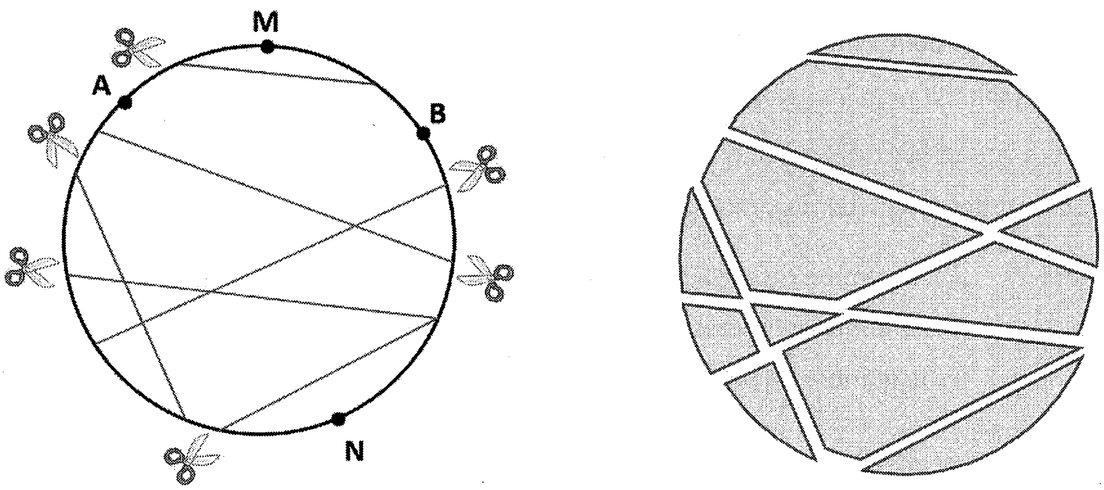
Il existe donc deux entiers naturels non nuls $p$ et $q$ tels que $\mathrm{AB} = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.

***b.*** Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

***c.*** Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul $n$ tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

***d.*** En déduire que si $p$ et $q$ sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.

# Découpage complet d'un disque et nombre de parties




On considère un disque qu'on découpe suivant un nombre **C** de **cordes**, concourantes ou non (on rappelle qu'une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont 2 points distincts du cercle).

On obtient alors un nombre **P** de « morceaux de disque » que l'on appellera **parties**.

*<u>Dans tout l'exercice</u> on supposera qu'à l'intérieur du disque (**c'est-à-dire en dehors des points du cercle**), chaque intersection de cordes n'appartiendra qu'à deux cordes seulement, ces intersections seront appelées « intersections simples ».*

On note **S** le nombre d'**intersections simples**.

Dans l'exemple d'illustration ci-dessus, on a C = 6 ; P = 11 et S = 4.

## <u>Partie I : Relation entre P, C et S :</u>

**1 ) *a* )** Tracer la corde [AB] dans le disque ci-dessus puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

**_b_ )** Tracer la corde [MN] (en plus de [AB] ) puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

**_c_ )** Tracer la corde [AN] (en plus des 2 précédentes) puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

**2 )** Etude du cas général :

On considère un disque contenant C cordes, P parties et S intersections simples.

On trace une nouvelle corde [AB] et on note k le nombre d'intersections simples <u>sur la corde</u> [AB] (k entier naturel, pouvant être nul), P' le nombre de parties, S' le nombre d'intersections simples et C' le nombre de cordes dans le disque.

**_a_ )** Justifier que S' = S + k et que P' = P + k + 1 puis montrer que P' – S' – C' = P – S – C .

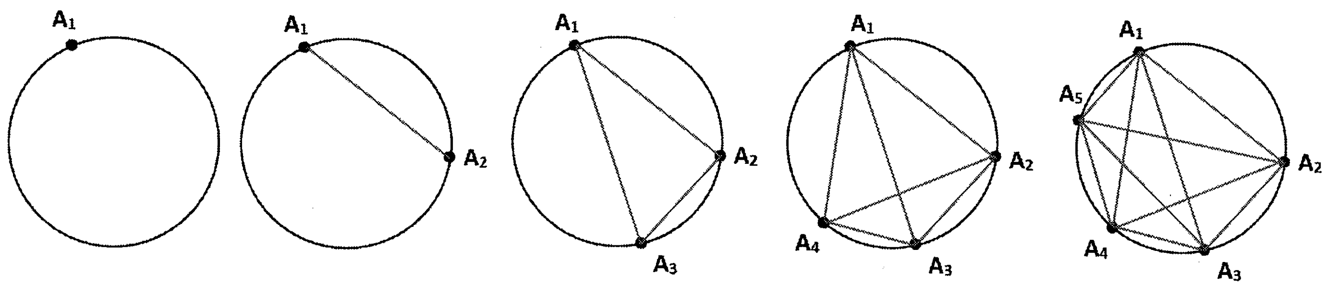
**_b_ )** Déduire que, quel que soit le nombre C de cordes tracées dans le disque, on a : P – S – C = 1 .

## Partie II : Application au découpage complet d'un disque : conjectures et calculs.

On considère N points distincts deux à deux $A_1, \ldots, A_N$ sur un cercle (N entier naturel non nul).
Chaque point est relié à tous les autres par des cordes (on dira qu'on a un découpage complet du disque). Comme dans la Partie I, on suppose que les points d'intersection des cordes à l'intérieur du disque sont des intersections simples.

On note : $C_N$ le nombre de cordes,
$S_N$ le nombre d'intersections simples,
$P_N$ le nombre de parties dans le disque.

**1 )** Voici les 5 premiers cas de figure :




***a* )** Préciser les valeurs de $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

***b* )** Au vu de ces premières valeurs de $P_N$, conjecturer les valeurs de $P_6$ et de $P_9$.

Cas général : dans la suite, on considère N points $A_1, A_2, \ldots, A_N$ sur le cercle.

**2 )** Soit $A_k$ un des points sur le cercle ( $1 \leq k \leq N$ ).
Combien de cordes contiennent le point $A_k$ ? Déduire que $C_N = \frac{N(N-1)}{2}$.

**3 )** On admet qu'il y a 24 façons d'ordonner 4 éléments { A ; B ; C ; D }.
(Par exemple { A ; B ; C ; D } ; { A ; B ; D ; C } ; { A ; C ; B ; D } ; … ; { D ; C ; B ; A } )
Montrer que $S_N = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

**4 )** Établir que $P_N = 1 + \frac{N(N-1)(N^2-5N+18)}{24}$.

**5 ) *a* )** Retrouver par le calcul les valeurs de $P_1$ ; $P_2$ ; $P_3$ ; $P_4$ ; $P_5$ puis calculer $P_6$.

***b* )** Existe-t-il un entier naturel N tel que $P_N = 256$ ? Préciser.

## Boites de macarons inversibles

Un triplet ( A ; B ; C ) est dit "pythagoricien" si A, B, C sont des entiers naturels non nuls tels que $A^2 + B^2 = C^2$

**Partie 1 : Triplets pythagoriciens contenant 2021**

**1 )** Les triplets ( 2021 ; 180 ; 2029 ) et ( 2021 ; 1520 ; 2529 ) sont-ils pythagoriciens ?

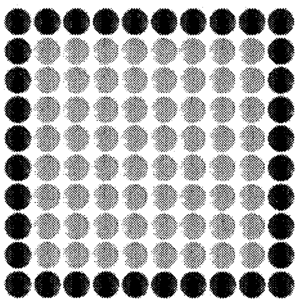
**2 )** Soit un triplet pythagoricien ( 2021 ; B ; C )

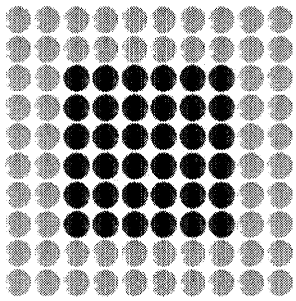
**a )** Montrer que $( C - B )( C + B ) = 2021^2$

**b )** Sachant que 2021 = 43 × 47 (1 ; 2021 ; 43 et 47 étant les seuls entiers naturels diviseurs de 2021), déterminer tous les triplets pythagoriciens de la forme ( 2021 ; B ; C ).

**Partie 2 : Application des triplets pythagoriciens :**

Un pâtissier vend des boites carrées remplies de deux sortes de macarons (représentés par des disques gris et noirs). Ce pâtissier veut trouver des boites où il peut former un carré central de macarons gris entouré de macarons noirs, puis un carré central de macarons noirs entouré de macarons gris *sans changer le nombre de macarons de chaque sorte* (pour avoir deux présentations différentes d'un même produit) : on dira que ces boites sont "inversibles", comme dans l'exemple ci-dessous d'une boite de 100 macarons composée de 64 macarons gris et de 36 macarons noirs.





**1 )** ***a*** **)** À l'aide de la boite inversible ci-dessus, montrer qu'il existe une boite inversible contenant 400 macarons, puis une boite inversible contenant 1600 macarons.

***b*** **)** Montrer qu'il existe une infinité de boites inversibles.

Pour une boite inversible on note : G le nombre de macarons gris,
N le nombre de macarons noirs,
T le nombre total de macarons.

**2 )** Justifier que $G = A^2$ , $N = B^2$ et $T = C^2$ où ( A ; B ; C ) est un triplet pythagoricien.

**3 )** Montrer qu'il n'existe pas de boite inversible contenant autant de macarons gris que de macarons noirs (on pourra utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers).

**4 )** ***a*** **)** Justifier par des arguments géométriques que G, N et T sont pairs.

***b*** **)** On rappelle qu'un entier est impair s'il peut s'écrire sous la forme $(2p + 1)$ avec $p$ entier. Démontrer que le carré d'un entier impair est impair.

***c*** **)** Déduire que A, B et C sont pairs.

**5 )** ***a*** **)** Soient $x$, $y$, $k$ entiers naturels non nuls avec $x < y$ : montrer que $( 2kxy\ ;\ k(y^2 - x^2)\ ;\ k(x^2 + y^2) )$ est pythagoricien.

***b*** **)** *Dans cette question on admettra que, à une inversion de A et B près, les triplets pythagoriciens ( A, B, C ) avec A, B, C tous pairs sont ceux de la forme* $( 2kxy\ ;\ k(y^2 - x^2)\ ;\ k(x^2 + y^2) )$ *avec :*

- *$k$ entier naturel non nul,*
- *$x$ et $y$ entiers naturels impairs tels que $x < y$.*

Le pâtissier souhaite trouver les trois plus petites boites inversibles (c'est-à-dire les trois plus petites valeurs de T possibles) : en faisant varier $k$, $x$, $y$ de façon ordonnée, déterminer les valeurs de T, G, N pour chacune de ces trois boites.