MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Étiquetage gracieux d'une figure

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L'ensemble ainsi constitué est appelé *figure.*
On effectue l'*étiquetage* d'une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n, ces entiers étant distincts deux à deux.
On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.
On dit que l'*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n.
On donne ci-dessous un exemple d'*étiquetage gracieux* d'une figure comportant 6 points et 7 segments :

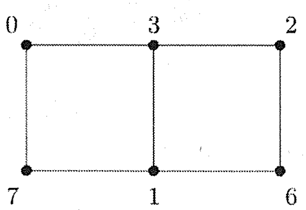


Figure étiquetée

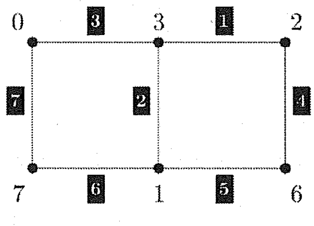
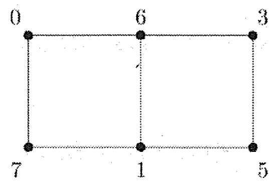
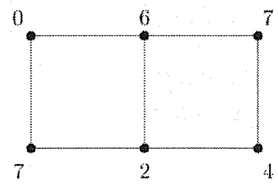


Figure étiquetée avec indication des pondérations

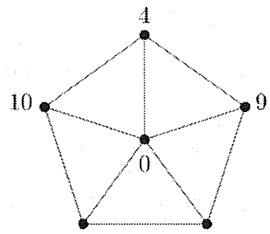
Suite de l'énoncé en page 2

A. Des exemples





1. Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l'étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.

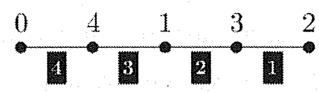


2. Compléter l'étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.

B. Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la figure L_n constituée de $n+1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l'étiquetage gracieux des points de la figure L_4.

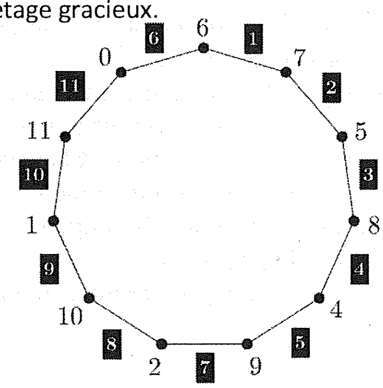


1. Montrer qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5, L_6 et L_7.

2. On admet qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

C. Cas des polygones

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.



2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés muni d'un étiquetage gracieux.
En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.

3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :

- **a.** de parités différentes ;
- **b.** de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.

D. Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2 022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que $K_{2\,022}$ est constituée de 2 043 231 segments.

2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de $K_{2\,022}$.

- **a.** Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?
- **b.** On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.

3. Montrer finalement que $K_{2\,022}$ ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Nombres sectionnables

Partie A

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable unitaire* s'il est supérieur ou égal à 3 et s'il peut s'écrire sous la forme : $1+2+3+\cdots+p$ où p est un entier supérieur ou égal à 2.
Par exemple, 3 et 10 sont des nombres sectionnables unitaires car $3 = 1 + 2$ et $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. a. Montrer que 21 et 136 sont sectionnables unitaires.
b. Est-ce que 1850 est sectionnable unitaire ?

2. Soit a un entier supérieur ou égal à 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que a soit un entier sectionnable unitaire.

Partie B

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable* s'il peut s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

Par exemple, 24 et 25 sont sectionnables car $24 = 7 + 8 + 9$ et $25 = 12 + 13$.
En revanche, 4 n'est pas sectionnable car $1+2<4<1+2+3$ et $2+3>4$.

1. Justifier que 9 et 15 sont sectionnables mais que 16 ne l'est pas.

2. Démontrer que si un entier est impair et supérieur ou égal à 3, alors il est sectionnable.

3. Soit k et q des entiers naturels avec $k \geqslant 2$. On pose $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$.
Montrer que $2S = k(k+1+2q)$.

4. Montrer qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.

5. On s'intéresse aux entiers strictement positifs pairs qui ne sont pas des puissances de 2.
Soit n un tel entier. On admet qu'il existe un unique couple d'entiers (r,m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n = 2^r \times m$.

a. Déterminer r et m quand $n = 56$. En déduire que 56 est sectionnable et l'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

b. Montrer que 44 est sectionnable.

c. Montrer que tout nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2 est sectionnable.

6. Déduire de ce qui précède l'ensemble des nombres sectionnables.

Partie C

On dit qu'un nombre entier est *uniquement sectionnable* lorsqu'il peut s'écrire de façon unique comme somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

1. Montrer que le nombre 13 est uniquement sectionnable. Le nombre 25 est-il uniquement sectionnable ?

2. a. Soit un entier n qui est la somme de k entiers strictement positifs consécutifs, avec $k \geqslant 3$.
On peut donc écrire n sous la forme $n=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, avec q entier positif ou nul.
Montrer que n n'est pas un nombre premier.

b. En déduire que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est uniquement sectionnable.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Trois

Le protocole suivant permet de construire une suite d'entiers naturels.

Le premier terme de la suite est 4.
Pour passer d'un nombre au suivant, on réalise au choix une des opérations suivantes :

- multiplier le nombre par 3 ;
- multiplier le nombre par 3 puis ajouter 2 ;
- si le nombre est pair, le diviser par 2.

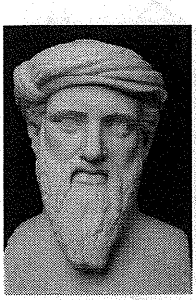
Si une des suites construites de cette façon a pour terme un certain nombre N, on dira que N est *atteignable*.
Par exemple, le nombre 11 est atteignable : on part de 4, on multiplie par 3 pour obtenir 12, on divise deux fois successivement par 2 pour obtenir 3, qu'on multiplie par 3 avant d'ajouter 2.

1. Montrer que tous les entiers naturels compris entre 1 et 12 sont atteignables.

2. Montrer que 2 022 est atteignable.

3. On suppose qu'il existe des entiers non atteignables. On note m le plus petit d'entre eux.
  a. Montrer que m n'est pas un multiple de 3.
  b. Montrer que $m-2$ n'est pas un multiple de 3.
  c. Montrer que $m-1$ n'est pas non plus un multiple de 3.
  d. Conclure.

Le cercle des pythagoriciens



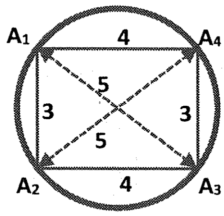
A Crotone (dans l'actuelle Italie), Pythagore (580 av. JC – 495 av. JC) a créé une école : la Fraternité pythagoricienne. Son fondement est, qu'à condition de choisir correctement l'unité, tout ensemble de nombres peut se ramener à des nombres entiers.

Chaque année les membres de cette fraternité décident de se réunir autour d'un cercle pour rendre compte de l'avancée de leurs recherches et, en l'honneur du maître Pythagore, il a été décidé que le diamètre de ce cercle doit être entier et que tous les membres de la fraternité doivent être à une distance entière de tous les autres...seulement les années passant, la fraternité comprend de plus en plus de membres...

Le but du problème est de savoir comment résoudre ce problème de disposition.

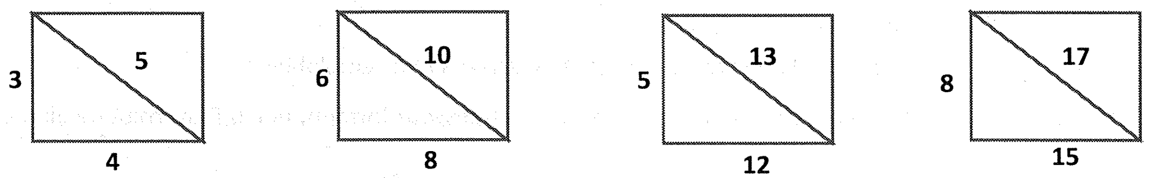
- Soit <u>N un entier naturel non nul</u>. On appellera **<u>« N-Fraternité de diamètre entier »</u>** un ensemble de N points distincts vérifiant les propriétés suivantes :
  - **Tous les points appartiennent à un même cercle de diamètre de longueur entière.**
  - **Chaque point est à une distance entière de tous les autres.**

  Dans l'exemple ci-contre, les sommets du rectangle $A_1A_2A_3A_4$ forment une 4-Fraternité de diamètre 5 car les points A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent à un cercle de diamètre 5 et chaque point est à une distance entière des autres.



- **<u>Un rectangle pythagoricien</u>** est un rectangle dont les longueurs a, b des côtés et la longueur c des deux diagonales sont des entiers naturels non nuls. On notera (c ; b ; a) un tel rectangle.

  <u>Exemples de rectangles pythagoriciens (échelle non respectée) :</u>



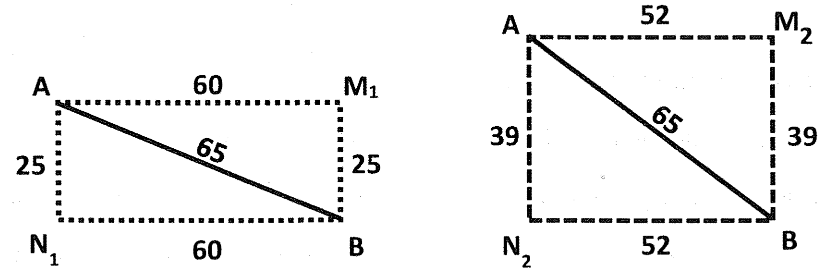
Rectangle (5 ; 4 ; 3) **Rectangle (10 ; 8 ; 6)** **Rectangle (13 ; 12 ; 5)** **Rectangle (17 ; 15 ; 8)**

Dans ces exemples, les rectangles pythagoriciens (5 ; 4 ; 3) et (10 ; 8 ; 6) sont semblables (leurs longueurs sont proportionnelles, de rapport 2, on pourra écrire que (10 ; 8 ; 6) = 2 × (5 ; 4 ; 3)) alors que les trois rectangles pythagoriciens (5 ; 4 ; 3) ; (13 ; 12 ; 5) et (17 ; 15 ; 8) ne sont pas semblables deux à deux.

On admettra qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens <u>non</u> semblables deux à deux.

<u>Partie 1 : Méthode des deux rectangles pythagoriciens.</u>

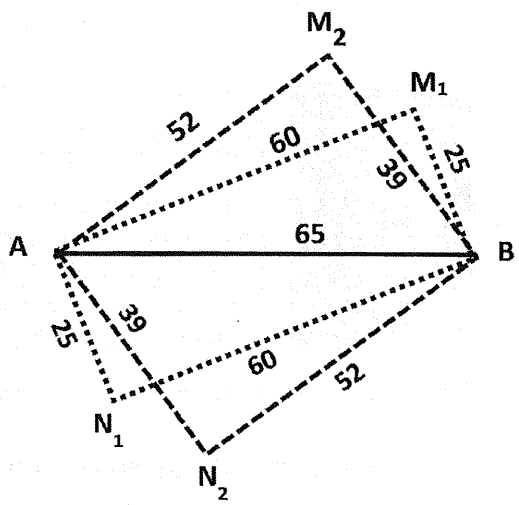
1) Justifier que les quadrilatères AM_1BN_1 et AM_2BN_2 tracés ci-dessous sont des rectangles pythagoriciens :



2) On a placé dans le schéma ci-contre les deux rectangles pythagoriciens précédents en y faisant correspondre les points A et B.

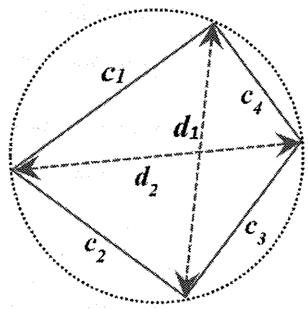
Soit O le milieu de [AB] :

Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent au cercle de centre O et de diamètre 65.



3) Dans la suite du problème, on admettra le théorème de Ptolémée :

Soit un quadrilatère inscrit dans un cercle, alors : $c_1 \times c_3 + c_2 \times c_4 = d_1 \times d_2$	
Où	c_1, c_2, c_3, c_4 désignent les longueurs des quatre côtés
et	d_1, d_2 sont les longueurs des deux diagonales du quadrilatère.



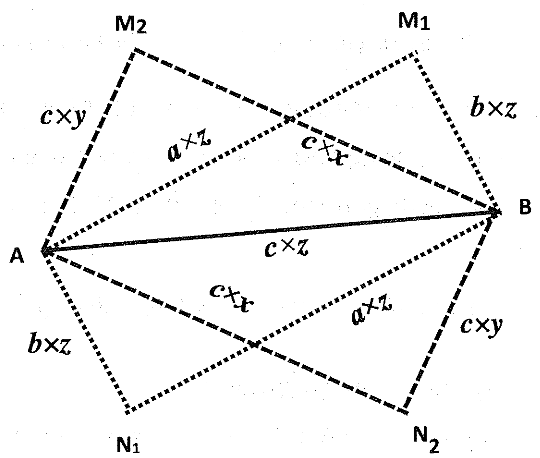
a) Calculer les longueurs M_1N_2 et M_1M_2 de la figure précédente.

b) Déduire que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 forment une 6-Fraternité de diamètre 65.

Partie 2 : Généralisation.

Soient (c ; b ; a) et (z ; y ; x) deux rectangles pythagoriciens non semblables.

Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 de la figure ci-dessous forment une 6-Fraternité de diamètre $c \times z$.



Partie 3 : Applications aux N-Fraternités

1) Justifier qu'il existe une 8-Fraternité de diamètre $5 \times 13 \times 17 = 1\,105$.

2) Justifier qu'il existe une 2022-Fraternité de diamètre entier.

3) Justifier que pour tout entier naturel non nul N, il existe une N-Fraternité de diamètre entier.

Nombre de multiplications avec un même résultat.

Pour chaque entier naturel x supérieur ou égal à 2, on note M(x) le nombre de couples d'entiers naturels (a ; b) tels que a × b = x.

Exemples :

16 = 1×16 = 2×8 = 4×4 = 8×2 = 16×1, d'où les 5 couples (1 ; 16) ; (2 ; 8) ; (4 ; 4) ; (8 ; 2) ; (16 ; 1) donc M(16) = 5.

17 = 1×17 = 17×1, d'où les 2 couples (1 ; 17) ; (17 ; 1) donc M(17) = 2.

Le but du problème est d'étudier les valeurs de M(x) en fonction de x.

Partie I : Etude de cas.

1) Recopier puis compléter sur votre copie le tableau de valeurs suivant (aucune justification n'est demandée) :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M(x)									

2) On rappelle qu'un nombre premier p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ayant exactement deux diviseurs 1 et p.

Premiers exemples : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 …

Démontrer que « M(x) = 2 » équivaut à « x est nombre premier »

3) On rappelle qu'un carré parfait est un entier naturel s'écrivant sous la forme a^2, où a est un entier naturel.

Démontrer que « M(x) est impair » équivaut à « x est un carré parfait ».

4) Justifier que pour tout entier x supérieur ou égal à 2, M(x) est égal au nombre de diviseurs de x.

Partie II : Etude des premiers antécédents de M :

On rappelle que tout entier naturel x supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, affectés de leur exposant.

Ainsi $\boldsymbol{x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}}$

où $p_1, \dots, p_n$ désignent les différents nombres premiers diviseurs de x, rangés par ordre croissant

$a_1, \dots, a_n$ désignent leurs exposants non nuls respectifs.

Par exemple : $2022 = 2^1 \times 3^1 \times 337^1$ $\quad$ $2023 = 7^1 \times 17^2$ $\quad$ $2024 = 2^3 \times 11^1 \times 23^1$

$2025 = 3^4 \times 5^2$ $\quad$ $2026 = 2^1 \times 1013^1$ $\quad$ $2027 = 2027^1$ (2027 est un nombre premier)

Avec ces notations, on admet que les diviseurs de x sont les entiers naturels s'écrivant sous la forme :

$$\boldsymbol{p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{b_n} \quad \text{avec} \quad 0 \le b_1 \le a_1 \; ; \; 0 \le b_2 \le a_2 \; ; \dots \; ; \; 0 \le b_n \le a_n}$$

1) Montrer que M(x) = $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$

2) Déterminer M(2022), M(2^{2022}), M(20^{22}).

3) *a*) Montrer que les entiers naturels x tels que M(x) = 3 sont ceux s'écrivant sous la forme p^2 où p désigne un nombre premier.

b) Montrer que les entiers naturels x tels que M(x) = 4 sont ceux s'écrivant sous la forme p^3 ou p×q , où p et q désignent des nombres premiers distincts.

c) Montrer que les entiers naturels x tels que M(x) = 5 sont ceux s'écrivant sous la forme p^4 où p désigne un nombre premier.

<u>Partie III : Etude d'antécédents de M</u>

Avec les notations de la Partie II précédente, on rappelle que :

Si $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ alors $M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$

n désigne donc le nombre d'entiers premiers divisant x ($n \geq 1$).

1) *a*) Trouver un entier naturel x tel que $M(x) = 2022$

b) Montrer que pour tout entier naturel y supérieur ou égal à 2, il existe au moins un entier naturel x supérieur ou égal à 2 tel que $M(x) = y$

2) **Dans cette question, on considère l'ensemble des entiers naturels $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ tels que $M(x) = 6000$:**

a) Ecrire 6000 sous la forme de produit de nombres premiers et en déduire que $1 \leq n \leq 8$.

b) Trouver le plus petit entier naturel x tel que $n = 1$ (c'est-à-dire tel que $x = p_1^{a_1}$)

c) Trouver le plus petit entier naturel x tel que $n = 8$ (c'est-à-dire tel que $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_8^{a_8}$)

d) Cas où $n = 2$:

- Préciser deux nombres entiers x distincts s'écrivant sous la forme 2^a3^b (a et b entiers ≥ 1) tels que $M(x) = 6000$.
- Trouver le <u>nombre</u> d'entiers x de la forme 2^a3^b avec a et b entiers naturels non nuls, tels que $M(x) = 6000$.

N.B. : Dans cette question, on demande uniquement le <u>nombre</u> d'entiers x de la forme 2^a3^b tels que $M(x) = 6000$, mais il n'est pas demandé de préciser les entiers x correspondants.

3) Soient y un entier naturel supérieur ou égal à 2, et p et q deux nombres premiers distincts :

a) Justifier que le nombre d'entiers x de la forme p^aq^b , avec a et b entiers naturels non nuls, tels que $M(x) = y$, est égal à $M(y) - 2$.

b) Préciser le nombre d'entiers de la forme 5^a7^b , avec a et b entiers naturels non nuls, tels que $M(x) = 12^{34}$.