Autour de Stone-Weierstraß

Exercice 1
Soit X un espace métrique. Montrer que $\mathcal{C}_0(X,\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(X,\mathbf{R})$.

Exercice 2
Soit X un espace métrique tel que $\mathcal{C}_0(X,\mathbf{R}) = \mathcal{C}_b(X,\mathbf{R})$. Que dire de X ?

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Déterminer $\mathcal{C}_0(X,\mathbf{R})$.

Exercice 4
Soit $a < b$ deux réels, et soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ dense dans cette algèbre munie de la norme $\|.\|_\infty$. En déduire qu'il existe une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément sur $[a,b]$ et dont la limite uniforme n'est pas une fonction dérivable. Sauriez-vous en donner des exemples explicites ?

Exercice 5

1) Soit X un compact de $\mathbf{R}^n$. Montrer que toute fonction continue de X vers $\mathbf{R}$ est limite uniforme dans X d'une suite de fonctions polynomiales à n variables.

2) En déduire que toute fonction continue de X dans $\mathbf{R}$ peut s'écrire comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions polynomiales à coefficients réels.

3) Ici on considère le cas particulier où $n = 1$ et où $X = [-1,1]$. Peut-on déduire de ce qui précède que toute f continue sur $[-1,1]$ est développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 6
On appelle polynômes trigonométriques les fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ qui peuvent être écrites sous la forme :

$$x \mapsto \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k e^{ikx}, \qquad \text{pour un } m \in \mathbf{N} \text{ et des } \alpha_k \in \mathbf{C}.$$

On note S^1 le cercle $|z| = 1$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de S^1 vers $\mathbf{C}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=-m}^{m} \alpha_k z^k$ est dense dans l'espace des fonctions continues de S^1 vers $\mathbf{C}$.

2) Pour f continue de S^1 vers $\mathbf{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(e^{ix})$. Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est une isométrie linéaire bijective de $\mathcal{C}(S^1,\mathbf{C})$ sur $\mathcal{P}$.

3) Montrer que toute fonction de $\mathcal{P}$ est limite uniforme sur $\mathbf{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

4) En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques à coefficients réels est dense dans l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

5) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}^+$ des fonctions de S^1 vers $\mathbf{C}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^k$ n'est **pas** dense dans l'espace des fonctions continues de S^1 vers $\mathbf{C}$.

Exercice 7
Soit $a < b$ deux réels. Pour $m \geq 0$, on définit $\mathcal{C}^m([a,b],\mathbf{R})$ comme l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$, muni de la norme : $\|f\|_{\mathcal{C}^m} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(m)}\|_\infty$. Montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans cet espace, par récurrence sur l'entier m.

Exercice 8

1) Montrer que la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ n'est pas limite uniforme sur $\mathbf{R}$ d'une suite de polynômes.

2) Montrer que toute fonction continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est limite simple d'une suite de polynômes.

Exercice 9
Soit $a < b$ deux réels, et soit f une fonction continue de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$ qui vérifie la propriété :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \int_a^b f(t) t^n \, dt = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\int_a^b [f(t)]^2 \, dt = 0$, puis que f est la fonction nulle.

Exercice 10
Soit $a < b$ deux réels. On note A l'ensemble des fonctions polynomiales réelles dont l'intégrale est nulle sur $[a, b]$. Décrire l'adhérence de A dans l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$.

Exercice 11
Soit K un espace métrique compact et soit $a \in K$. Soit A une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ telle que pour tout $g \in A$, $g(a) = 0$. Décrire l'adhérence de A dans l'espace des fonctions continues de K vers $\mathbf{R}$.

Quelques révisions d'intégration

Exercice 12
Après avoir préalablement l'intégrabilité des fonctions qui apparaissent dans les intégrales ci-dessous, déterminer la limite quand n tend vers l'infini des suites I_n et J_n définies par :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n x e^{-n x^2}}{1 + x^2} dx.$$

Exercice 13
Pour tout $n \geq 2$ et tout x dans $]0, +\infty[$, on note :

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1) Montrer que toutes les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 2$,

$$1 + x + \frac{x^2}{4} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

3) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx$.

Exercice 14
Soit g une fonction mesurable de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}$, et F la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ par $F(x) = g(\|x\|)$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g pour que F soit intégrable sur $\mathbf{R}^n$.

2) Déterminer pour quels α complexes la fonction $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est **localement** intégrable sur $\mathbf{R}^n$.

3) Déterminer pour quels α complexes cette même fonction est intégrable sur le complémentaire d'une boule centrée à l'origine.

Espaces L^p

Exercice 15
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ si x est irrationnel mais $f(x) = 2$ si x est rationnel.
Pour chacun des trois espaces mesurés $(\mathbf{R}, \delta_0)$, $(\mathbf{R}, \delta_{\sqrt{2}})$ et $(\mathbf{R}, dx)$, déterminer si f est dans l'espace L^∞ correspondant et préciser la valeur de $\|f\|_\infty$.

Exercice 16
L'"inf" qui intervient dans la définition de la norme L^∞ est-il aussi un minimum ? Justification ou contre-exemple. Montrer qu'une classe de L^∞ de norme A contient un représentant f pour lequel $\sup |f| = A$. Contient-elle nécessairement un représentant g pour lequel $\operatorname{Max} |g| = A$?

Exercice 17
Le sous-espace $\mathcal{C}_b$ des fonctions continues bornées est-il ou non fermé dans $L^\infty(\mathbf{R})$?

Exercice 18
Donner un exemple d'une suite (f_n) et d'une fonction f, toutes dans $L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$, qui vérifient $f_n \overset{L^1}{\to} f$ mais pour lesquelles on a pourtant $f_n \not\to f$ dans L^∞.

Exercice 19
Soit (Ω, μ) un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < +\infty$.
Montrer que $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, puis que la convergence d'une suite (f_n) vers f dans L^∞ entraîne cette convergence dans L^1.

Exercice 20
Donner un exemple d'une suite (f_n) et d'une fonction f, toutes dans $L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$, qui vérifient $f_n \overset{L^\infty}{\to} f$ et $\int_{\mathbf{R}} f_n \to \int_{\mathbf{R}} f$ mais pour lesquelles on a pourtant $f_n \not\to f$ dans L^1.

Exercice 21
Soit (Ω, μ) un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < +\infty$, et soit $1 \leq p_1 \leq p_2 < +\infty$ deux réels.
Montrer que $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$ et que cette inclusion est continue.

Exercice 22
Donner un exemple d'une suite (f_n) dans $L^1([0,1])$ telle que f_n tende vers 0 dans L^1 mais ne tende pas vers 0 presque partout.
Indication : il y a des exemples pas trop compliqués pour lequels f_n est de la forme $\mathbf{1}_{I_n}$, où I_n est un intervalle.

Exercice 23
On considère les suites de fonctions définies sur $]0,1[$ comme suit :

$$f_n(x) = (-1)^n x^n, \qquad g_n(x) = x^n \sqrt{1-x}, \qquad h_n(x) = (-1)^n (n+1) x^n.$$

Montrer que toutes ces fonctions sont dans $L^1]0,1[$ et dans $L^2]0,1[$. Discuter la convergence des trois séries $\sum f_n$, $\sum g_n$ et $\sum h_n$ dans L^1 puis dans L^2.

Exercice 24
On note f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = x^{-1/3}(1+x)^{-1/3}$.
Déterminer l'ensemble des $p \in [1, +\infty]$ pour lesquels $f \in L^p(\mathbf{R}^+)$.

Exercice 25
Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, nulle en dehors d'un compact et non identiquement nulle. Pour chaque $n \geq 0$ et tout x réel, on pose $f_n(x) = n 2^n f(3^n x)$. Déterminer l'ensemble des $p \in [1, +\infty]$ pour lesquels la série $\sum f_n$ est convergente dans $L^p(\mathbf{R})$.

Exercice 26
(Une généralisation de Hölder puis de Hölder itéré) On se place dans un espace mesuré (Ω, μ).
1) Soit p, q et r dans $[1, +\infty]$ vérifiant la relation :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Soit f et g des fonctions éléments respectifs de L^p et L^q. Montrer que $fg \in L^r$ avec l'inégalité :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2) Soit maintenant $n \geq 2$ et soit $n+1$ éléments $p_1, \ldots, p_n$, r de $[1, +\infty]$ vérifiant la relation :

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}.$$

Soit pour chaque i entre 1 et n une fonction f_i dans L^{p_i}. Montrer que $f_1 f_2 \ldots f_n \in L^r$ avec l'inégalité :

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Exercice 27

(Cet exercice utilise l'exercice précédent)

1) Soit p et q avec $1 \leq p < q < +\infty$ et soit $r \in]p, q[$. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec en outre $\alpha + \beta = 1$ pour lesquels :

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$

Soit maintenant (Ω, μ) un espace mesuré, et soit $f \in L^p \cap L^q$. Montrer que $f \in L^r$ avec la majoration :

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^\beta.$$

Montrer que si on a une suite (f_n) d'éléments de $L^p \cap L^q$ qui tend vers f en norme L^p et en norme L^q, elle tend aussi vers f en norme L^r.
L'inclusion de $(L^p \cap L^q, \|.\|_p)$ dans L_r est-elle forcément continue ? Justifier ou donner un contre-exemple.

2) Écrire une inégalité analogue à celle de la question précédente pour le cas où $q = +\infty$.

Exercice 28

Soit (Ω, μ) un espace mesuré et soit $p < q$ avec $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $f \in L^p \cap L^q$. Au vu de l'exercice précédent, on sait donc même que $f \in \bigcap_{p \leq a \leq q} L^a(\Omega)$.

1) Dans cette question, on suppose que $|f(x)| \leq 1$ presque partout sur Ω. Montrer que $a \mapsto \|f\|_a$ est une fonction continue sur $[p, q]$.

2) Ce résultat est-il vrai si on ne suppose plus f bornée par 1 ?

Exercice 29

Soit (Ω, μ) un espace mesuré et soit f une fonction de $\bigcap_{1 \leq a < \infty} L^a(\Omega)$. On suppose que f n'est pas presque partout nulle.

1) Soit m un réel strictement positif avec $0 < m < \|f\|_\infty$. Montrer que $|f|^{-1}([m, \infty[)$ est de mesure finie et strictement positive.

2) En déduire que $\|f\|_\infty \leq \liminf_{a \to \infty} \|f\|_a$.

3) Montrer que si $\|f\|_\infty < \infty$, alors $\limsup_{a \to \infty} \|f\|_a \leq \|f\|_\infty$.

4) Montrer que $\|f\|_a \to \|f\|_\infty$ quand $a \to \infty$.

5) Donner un exemple d'une fonction f vérifiant les hypothèses de l'exercice mais pour laquelle $\|f\|_\infty = \infty$.

Exercice 30

Soit (Ω, μ) un espace mesuré et soit $p < q$ avec $1 \leq p < q < +\infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p \cap L^q$. On suppose que la suite (f_n) tend vers une fonction g dans L^p et vers une fonction h dans L^q. Montrer que $g = h$ presque partout.

Exercice 31
Soit (Ω, μ) un espace mesuré, soit (f_n) une suite de fonctions dans L^1, avec $\|f_n\|_1 = 1$ et soit f une fonction mesurable sur Ω. On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ pour presque tout x de Ω.

1) Montrer que $f \in L^1$ et vérifie $\|f\|_1 \leq 1$.

2) Donner un exemple de telle situation où $\|f\|_1 < 1$.

3) On suppose en outre que $\|f\|_1 = 1$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
Indication : appliquer le lemme de Fatou à $g_n = (|f_n| + |f|) - |f_n - f|$.

Exercice 32
1) Soit f, g et h trois fonctions de $L^2(\mathbf{R}^2)$. On définit sur $\mathbf{R}^3$ une fonction F par :

$$F(x, y, z) = f(x, y)g(y, z)h(z, x).$$

Montrer que $\|F\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \|h\|_2$.

2) Soit $A \subset \mathbf{R}^3$ une partie mesurable. On note V le volume de A et S_1, S_2 et S_3 les aires des projections de A sur les trois plans de coordonnées.
Déduire de la question précédente que $V \leq \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Un exercice de transition, qui nous servira pour la convolution

Exercice 33
Pour f fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ et $t \in \mathbf{R}^n$, on note $\tau_t f$ ("translatée de f de vecteur t") la fonction $x \mapsto f(x-t)$.

1) Dans cette question, on fixe $t \in \mathbf{R}^n$. Montrer que si on considère τ_t comme application de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ vers lui-même, c'est une application linéaire continue bijective.

2) Dans cette question, on fixe au contraire f qu'on suppose continue **à support compact**. Montrer que l'application $t \mapsto \tau_t f$ de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ est uniformément continue.

3) Le résultat qui précède n'est pas vrai si on ne suppose pas f à support compact. Donner un contre-exemple.

4) Et qu'en est-il si on suppose $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$?

5) On fixe maintenant un $p \in [1, +\infty[$ et une $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$.
En utilisant la question 2, montrer que l'application $t \mapsto \tau_t f$ de $\mathbf{R}^n$ vers $L^p(\mathbf{R}^n)$ est uniformément continue.

6) Donner un contre-exemple (simple) où ça ne marche pas si $p = \infty$.

Convolution

Exercice 34
Soit f l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbf{R}^+$ complétée par 0 ailleurs.

1) Justifier de l'existence de la puissance de convolution à tout ordre $f_n = f * f * \cdots * f$ (n facteurs).

2) Calculer f_n.

Exercice 35
Soit f l'élément de $L^1(\mathbf{R})$ défini par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ pour $0 < t \leq 1$ et $f(t) = 0$ ailleurs, et soit g la fonction définie par : $g(t) = f(1-t)$.
Examiner pour quels x l'intégrale qui définit $(f * g)(x)$ est finie.

Exercice 36
Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit p' l'exposant conjugué. Soit f et g deux fonctions, respectivement dans L^p et $L^{p'}$ (de $\mathbf{R}^n$).

1) Justifier la formule suivante, valable pour tout $t \in \mathbf{R}^n$:

$$\tau_t(f * g) = (\tau_t f) * g.$$

(La notation τ_t est celle de l'exercice 33).

2) Dans cette question on suppose $p < \infty$. En utilisant l'exercice 33 et la formule qui précède, montrer que $f * g$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}^n$.

3) Montrer que ce résultat est encore vrai si $p = +\infty$ (indication : le truc pour faire marcher ça est tout bête !).

Exercice 37
Soit $p \in]1, +\infty[$ et soit p' l'exposant conjugué. Soit f et g deux fonctions, respectivement dans L^p et $L^{p'}$ (de $\mathbf{R}^n$).
En approchant f et g par des fonctions continues à support compact, montrer que $f * g$ tend vers zéro à l'infini.

Exercice 38
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Pour tout x réel, on pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1) Montrer (en la trouvant explicitement) qu'il existe une fonction g (indépendante de f) élément de L^∞ pour laquelle $F = g * f$.

2) En utilisant un exercice précédent, en déduire que F est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 39
Pour f fonction d'une variable réelle et ϵ réel non nul, on note $\rho_\epsilon f$ la fonction définie par :

$$(\rho_\epsilon f)(x) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}.$$

1) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, avec une dérivée f' dans $L^1(\mathbf{R})$. Montrer (en la trouvant explicitement) qu'il existe une fonction g_ϵ (indépendante de f) pour laquelle $\rho_\epsilon f = g_\epsilon * f'$.

2) En déduire que $\|\rho_\epsilon f\|_1 \leq \|f'\|_1$.

Exercice 40
Y a-t-il un élément neutre pour la multiplication usuelle, de $L^\infty(\mathbf{R}) \times L^\infty(\mathbf{R})$ vers $L^\infty(\mathbf{R})$?
Montrer qu'il n'y en a pas pour le produit de convolution, de $L^1(\mathbf{R}) \times L^1(\mathbf{R})$ vers $L^1(\mathbf{R})$.

Exercice 41
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable vérifiant pour tous x et y l'identité :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On pose $a = f(1)$.

1) Montrer que pour tout x rationnel, $f(x) = ax$.

2) On note $F = \exp(if)$. Justifier que F est dans L^∞, puis que pour toute j dans $L^1(\mathbf{R})$, l'intégrale qui définit $f * j$ définit une fonction continue sur $\mathbf{R}$ (on pourra se référer à un exercice précédent).
Conclure au sujet de f.

Exercice 42
Soit $1 \leq q < \infty$ et soit $g \in L^q(\mathbf{R})$. On considère l'application :

$$M_g : L^1(\mathbf{R}) \to L^q(\mathbf{R}), \qquad f \mapsto g * f.$$

1) Justifier que M_g est bien définie et linéaire.
On notera :

$$\|M_g\| = \sup_{f \in L^1(\mathbf{R}),\, f \neq 0} \frac{|M_g(f)\|_q}{\|f\|_1}$$

la norme de M_g considérée comme une application linéaire continue.

2) Montrer que M_g est bien continue.

3) Calculer $\|M_g\|$. (*Indication* : on pourra évaluer $M_g(f_k)$ pour (f_k) une suite régularisante dans $L^1(\mathbf{R})$.)

Exercice 43

Soit $\varphi \in L^1(\mathbf{R})$ avec $\int_{\mathbf{R}} \varphi = 0$. Pour $n \geq 1$ et x réel, on posera $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$.

1) Soit f continue à support compact sur $\mathbf{R}$. Pourquoi $\varphi_n * f$ est-elle continue sur $\mathbf{R}$? Montrer que pour x réel fixé, $(\varphi_n * f)(x) \to 0$ quand $n \to \infty$.

2) Dans cette question, on suppose aussi φ continue à support compact. Montrer qu'il existe un $R > 0$ tel que pour tout x réel et tout $n \geq 1$:

$$|f * \varphi_n(x)| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_1 \mathbf{1}_{[-R,R]}(x).$$

En déduire que $f * \varphi_n$ tend vers 0 dans L^1.

3) Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai pour $\varphi \in L^1$ et $f \in L^1$, sans hypothèses additionnelles de continuité (on utilisera un argument de densité).

Transformation de Fourier

On rappelle que dans ces TDs la transformée de Fourier dans $\mathbf{R}^n$ sera normalisée comme suit :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-2i\pi x.\xi}\, dx.$$

Exercice 44

Soit f dans $L^1(\mathbf{R}^n)$, $R > 0$ et $a \in \mathbf{R}^n$.

1) On note $f(R.)$ la fonction $x \mapsto f(Rx)$. Montrer que $\widehat{f(R.)} = \dfrac{1}{R^n}\hat{f}(\dfrac{\cdot}{R})$.

2) On note τ_a la fonction $f \mapsto f(x-a)$. Montrer que pour tout ξ, $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-i\pi a.\xi}\hat{f}(\xi)$.

3) On note $e_a(x) = e^{2i\pi a.x}$. Montrer que pour tout ξ, $\widehat{e_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.

Exercice 45

Soit f l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer $\hat{f}$.

Exercice 46

Soit g l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(x) = e^{-x^2}$. Montrer que $\hat{g}$ est dérivable et écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre dont $\hat{g}$ est solution. En déduire l'expression de $\hat{g}(\xi)$, pour ξ réel. Que vaut $\hat{g}_1$, où $g_1(x) = e^{-\pi x^2}$?

Exercice 47

Soit G l'application de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$ définie par $G(x) = e^{-\|x\|^2}$ où la norme utilisée est la norme euclidienne canonique. Calculer $\hat{G}$.

Exercice 48

Soit F l'application de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$ définie par $F(x) = e^{-\|x\|}$ où la norme utilisée est la norme euclidienne canonique.

1) Montrer que $F \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

2) En utilisant successivement les changements de variable $s = \sqrt{2t/\alpha}$, $u = \dfrac{1}{s}$ et $v = s - \dfrac{1}{s}$, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^{+*}$:

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-\alpha^2/4t}\, dt.$$

3) En utilisant cette formule et l'exercice précédent, calculer $\hat{F}$.

Exercice 49

Montrer que si f est continue à support compact de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 50
En utilisant la transformée de Fourier, résoudre l'équation $f * f = f$ d'inconnue $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

Exercice 51
Soit $a > 0$. On note $f = \dfrac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]}$ puis $g = f * f$. Calculer g, $\hat{f}$, $\hat{g}$. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

Exercice 52
1) Montrer que si pour $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, si $f * f = 0$, alors $f = 0$.

2) Montre qu'il existe deux fonctions non nulles f et g dans $L^1(\mathbf{R}^n)$ telles que $f * g = 0$.

Exercice 53
Pour tout $y > 0$ et tout x réel, on notera $\varphi_y(x) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.
Pour $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $(x, y) \in \mathbf{R}\times]0, +\infty[$, on pose :

$$u(x, y) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)e^{-2\pi y|\xi|}e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

1) En utilisant les exercices 44 et 45, calculer $\hat{\varphi_y}$.

2) Montrer que la fonction u a des dérivées partielles au second ordre sur tout son domaine de définition, et que $\Delta u = 0$.

3) Montrer que pour tout $y > 0$,

$$\text{pour presque tout } x \in \mathbf{R}, u(x, y) = \frac{1}{\pi}(f * \varphi_y)(x).$$

4) Montrer que dans $L^1(\mathbf{R})$, $u(., y) \to f$ quand $y \to 0$.

5) On suppose en outre que $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$. Montrer que pour presque tout x réel, $u(x, y) \to f(x)$ quand $y \to 0$.

Exercice 54
Soit f et g deux fonctions dans la classe de Schwartz. Montrer que $f * g$ est également dans la classe de Schwartz

1) sans utiliser la transformation de Fourier, via la définition et les propriétés de la convolution ;

2) en utilisant la transformation de Fourier.

Exercice 55
Soit f une fonction de la classe de Schwartz de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1) Écrire des conditions nécessaires et suffisantes portant sur la transformée de Fourier $\hat{f}$ pour que f vérifie :

$$\int_{\mathbf{R}} x^n f(x)\, dx = 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \qquad (1).$$

2) En déduire qu'il existe des fonctions non nulles vérifiant (1).

Exercice 56
Soit a et b deux réels > 0. En utilisant les exercices 44 et 45 et le théorème de Plancherel, calculer l'intégrale :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Exercice 57

1) En utilisant l'exercice 45, calculer $\hat{f}$ pour $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2) On note $g(x) = \text{Arctan}(1/x)$ arbitrairement prolongée en 0. Montrer que $g \in L^2(\mathbf{R})$ mais que $g \notin L^1(\mathbf{R})$.

3) On note pour tout $n \geq 1$, $g_n(x) = g(x)\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)$. Montrer que $g_n \to g$ dans L^2 quand $n \to +\infty$.

4) Calculer $\hat{g_n}$ à l'aide d'une intégration par parties, en déduire $\hat{g}$.

Exercice 58

1) Calculer la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,1]}$.

2) Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, prolongée arbitrairement en 0. En utilisant la première question, calculer $\hat{f}$.

3) En déduire la valeur de $\int_{\mathbf{R}} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$.

Exercice 59

1) Soit E le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbf{R})$ constitué des f de $L^2(\mathbf{R})$ telles que les fonctions $x \mapsto xf(x)$ et $x \mapsto x\hat{f}(x)$ soient aussi dans $L^2(\mathbf{R})$. Montrer que si $f \in E$, alors $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$.

2) Soit F l'espace vectoriel formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ telles que les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ soient dans $L^2(\mathbf{R})$ et que $f' \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$.

a) Montrer que f est un sous-espace vectoriel de E.

b) En considérant la dérivée de $x \mapsto xf(x)\overline{f(x)}$, montrer que si $f \in F$, $x|f(x)|^2$ a une limite quand $x \to +\infty$ (ou quand $x \to -\infty$).

c) Montrer que si $f \in F$, $x|f(x)|^2 \to 0$ quand $x \to \infty$.

d) Montrer que toute f de F vérifie l'identité :

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2\, dx = -2\,\mathcal{R}e\left[\int_{\mathbf{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\right].$$

e) Montrer enfin que pour toute $f \in F$:

$$\|f\|_2^4 \leq 16\pi^2\sqrt{2\pi}\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2\, dx \int_{\mathbf{R}} x^2|\hat{f}(x)|^2\, dx.$$

(si je ne me suis pas planté en revoyant la constante après révision de la définition de la transformée de Fourier...)

Espaces de Hilbert

Exercice 60

On se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi,\pi])$ dans lequel on note e_n l'application $[-\pi,\pi] \to \mathbf{C}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$.

1) Rappeler pourquoi $\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{2\pi}}\right)$ est une base hilbertienne de H.

2) On considère l'espace vectoriel E engendré par les $(e_n)_{n\geq 0}$. Montrer que E n'est **pas** fermé dans H.

3) Montrer que pour $f \in H$, $f \in \overline{E} \iff$ pour tout $n < 0$, $\langle f|e_n\rangle = 0$.

4) Pour $f \in H$, on note $U(f) = e_1 f$. Montrer que U est une isométrie linéaire bijective de H.

5) Montrer que U envoie $\overline{E}$ dans lui-même. On note T la restriction de U à l'espace de Hilbert $\overline{E}$. Quelle est sa norme ? Est-elle injective, surjective ?

Exercice 61
On se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi,\pi]^2)$ dans lequel on note $e_{m,n}$ l'application $[-\pi,\pi]^2 \to \mathbf{C}$ définie par $e_{m,n}(x,y) = e^{imx}e^{iny}$.
Montrer que $\left(\dfrac{e_{m,n}}{2\pi}\right)$ est une base hilbertienne de H.

Exercice 62
Soit H un espace préhilbertien et A une partie de H. On note $A^\perp = \{x \in H \mid \forall a \in A, \langle x|a\rangle = 0\}$.

1) a) Montrer que, pour toute partie B de H, $B^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé dans H.

b) Montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$.

c) En déduire que si $A = (A^\perp)^\perp$, alors A est un sous-espace vectoriel fermé dans H.

2) Dans cette question, on suppose que H est un espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'il est **complet**.
Montrer que si E est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $E = (E^\perp)^\perp$. (Suggestion : on pourra considérer un vecteur $y \in (E^\perp)^\perp$ puis le vecteur $z = y - \pi(y)$ où π est la projection orthogonale sur E).

3) Dans cette question on considère un espace de Hilbert séparable H_0 muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$, puis on considère l'espace vectoriel préhilbertien H engendré (algébriquement) par les vecteurs :

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n}, e_2, e_3, e_4, \dots\right).$$

a) Montrer que H n'est pas fermé dans H_0. L'espace préhilbertien H est-il un espace de Hilbert ?

b) Dans H on considère le sous-espace vectoriel E engendré (algébriquement) par $e_2, e_3, e_4, \dots$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel fermé dans H. Est-ce un sous-espace vectoriel fermé dans H_0 ?

c) Dans H, déterminer $E^\perp$ puis $(E^\perp)^\perp$.

Exercice 63
Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H.

1) Montrer que pour tout $x \in H$, les séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x|e_n\rangle e_{n+1} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x|e_n\rangle e_{n-1}$$

sont convergentes. On notera $R(x)$ et $S(x)$ leurs sommes respectives.

2) Montrer que R et S sont des applications linéaires continues de H dans H.

3) Montrer que R est une application isométrique mais n'est pas surjective.

4) Montrer que S est surjective mais n'est pas injective.

5) a) Quelles sont les valeurs propres de R ?

b) Soit λ une valeur propre de S. Montrer que la suite (λ^n) est élément de l^2.

c) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de S est le disque ouvert $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\}$.

Exercice 64
Montrer que les espaces de Banach $L^1(\mathbf{R})$ et $L^\infty(\mathbf{R})$ ne peuvent être munis d'un produit scalaire hilbertien définissant leur norme.

Exercice 65
Pour tout $n \geq 0$ et tout x réel, on pose :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$$

(ce sont les "polynômes de Laguerre").
On notera $l_n(x) = e^{-x/2}L_n(x)$.
1) Vérifier que $(l_0, l_1, \ldots)$ est un système orthonormal dans $\mathrm{L}^2\left([0, +\infty[\right)$.
2) Montrer que pour tout $t \in]-1, 1[$ et tout x réel :

$$(*) \quad \sum_{n \geq 0} t^n l_n(x) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1+t}{1-t}\right]x}.$$

3) On se propose de montrer que le système $(l_n)_{n\geq 0}$ constitue une base orthonormale (hilbertienne) de $\mathrm{L}^2\left(\mathbf{R}^+\right)$.
Dans cette optique, on notera F l'adhérence dans $\mathrm{L}^2\left(\mathbf{R}^+\right)$ de l'espace engendré (algébriquement) par les l_n.
On notera par ailleurs $e_m : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ défini par $e_m(t) = e^{-(2m+1)x/2}$ et E l'adhérence du sous-espace engendré par les e_m.

a) En appliquant $(*)$ à $t = \dfrac{m}{m+1}$, montrer que pour tout $m \geq 0$, e_m est dans F

b) Soit f une fonction de $\mathbf{R}^{+*}$ vers $\mathbf{C}$ supposée continue et nulle hors d'un compact.
En approchant la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(y) = \dfrac{f\left(|\ln y|\right)}{\sqrt{y}}$ par des polynômes, montrer que $f \in E$.

c) Conclure.

Source : Courant-Hilbert p. 95 et sq.

Exercice 66
1) Soit A l'opérateur de $l^2(\mathbf{N})$ vers $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ défini par :

$$(\xi_n)_{n\geq 0} \mapsto \left(\sum_i \frac{1}{2^{i+n+1}}\xi_i\right)_{n\geq 0}.$$

Justifier que A envoie $l_2(\mathbf{N})$ dans lui-même. Préciser ses espaces propres et le décrire simplement.
2) Soit B l'opérateur de $l^2(\mathbf{N})$ vers $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ défini par :

$$(\xi_n)_{n\geq 0} \mapsto \left(\sum_i \frac{1}{i+n+1}\xi_i\right)_{n\geq 0}.$$

On notera $\alpha_{ij} = \dfrac{1}{i+j+1}$ et $p_i = \dfrac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}}$.
(Pour N fini, la matrice $(\alpha_{ij})_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq N}}$ est appelée matrice de Hilbert ; la collection de tous les α_{ij} est occasionnellement appelée "matrice de Hilbert infinie" : c'est en quelque sorte la matrice de B dans la base orthonormale évidente de $l_2(\mathbf{N})$).

a) Vérifier que pour tout $b \geq 0$ fixé la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x+b)\sqrt{x}}$ est convexe sur $\mathbf{R}^{+*}$.

b) En déduire que pour tous a, $b \geq 0$:

$$\frac{1}{(a+\frac{1}{2}+b)\sqrt{a+\frac{1}{2}}} \leq \int_a^{a+1} \frac{dx}{(x+b)\sqrt{x}}.$$

c) En déduire que pour tout j :

$$\sum_i \alpha_{ij} p_i \leq \pi p_j.$$

d) Soit $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ un élément de $l^2(\mathbf{N})$. Montrer que $B\xi$ est aussi dans l^2 avec en outre la majoration $\|B\xi\|_2 \leq \pi \|\xi\|_2$.
(Indication : pour cette question on appliquera Cauchy-Schwarz en faisant la manipulation :

$$\alpha_{ij}\xi_i = \left(\sqrt{\alpha_{ij}}\sqrt{p_i}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha_{ij}}\xi_i}{\sqrt{p_i}}\right).)$$

3) (Une jolie application de l'opérateur B) :
Soit f un élément de $\mathrm{L}^2([0,1])$. Pour tout $n \geq 0$, on notera $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)x^n\,dx$. Montrer l'inégalité :

$$\sum_n |a_n|^2 \leq \pi \|f\|_2^2.$$

(Indication : pour chaque N fini, considérer le produit scalaire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\overline{\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right)}\,dx$; d'une part en le calculant et d'autre part en le majorant).
Sources :Halmos (A Hilbert space problem book), problèmes 45 à 47 et Hardy-Littlewood-Polya (Inequalities) p. 237 pour la question 3i.