Intégration des fonctions continues par morceaux

Vous savez calculer l'intégrale de plus d'une fonction continue (enfin, je l'espère). L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'intégrale existe même pour des fonctions continues pour lesquelles on ne saurait la calculer, et accessoirement de prouver quelques unes de ses propriétés simples.

À la fois pour des raisons techniques (les fonctions en escalier ne sont pas continues, et sont des outils bien pratiques pour construire l'intégrale) que pratiques (on a effectivement vraiment besoin dans des situations réelles d'intégrer des fonctions présentant quelques discontinuités) on va étendre ce projet à une classe de fonctions un peu plus large que les fonctions continues : les fonctions continues par morceaux.

1 - Fonctions continues par morceaux sur un segment fermé borné

Les définitions étant plus simples sur un segment fermé borné que sur un intervalle quelconque, on reportera le cas général à quelques remarques en fin de chapitre, et on ne travaillera dans cette section et la suivante que sur un intervalle $[a, b]$ fermé et borné (avec $a < b$).

Définition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f une fonction de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$. On dit que f est une **fonction en escalier** lorsqu'il existe un entier n (avec $1 \leq n$) et des réels $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ tels que f soit constante sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ (où $0 \leq i < n$).

Définition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f une fonction de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$. On dit que f est une fonction **continue par morceaux** lorsqu'il existe un entier n (avec $1 \leq n$) et des réels $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ tels que f soit continue sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ (où $0 \leq i < n$), que chaque limite à droite $\lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ c_i < t}} f(t)$ (où $0 \leq i < n$) existe et chaque limite à gauche $\lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ t < c_i}} f(t)$ (où $0 < i \leq n$) existe.

Il est évident que les fonctions continues et les fonctions en escalier sont des exemples simples de fonctions continues par morceaux. Tout s'y ramène par le

Lemme : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f une fonction de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$. Alors f est continue par morceaux si et seulement s'il existe une fonction continue g de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$ et une fonction en escalier h de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$ telles que $f = g + h$.

Démonstration :

Preuve de $\Leftarrow$ (qui est le sens le plus facile). Soit $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ un découpage de l'intervalle $[a, b]$ tel que h soit constante sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$. Alors sur chacun de ces intervalles h et g sont continues, donc aussi f. De plus en chaque point de ce découpage, g et h ont une limite à droite et à gauche, donc f aussi.

Preuve de $\Rightarrow$. Supposons f continue par morceaux et soit $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ un découpage associé à la définition de cette continuité par morceaux. On va construire h en escalier avec ce découpage. Pour cela, notons $l_i^+ = \lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ c_i < t}} f(t)$ (pour $0 \leq i < n$) et $l_i^- = \lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ t < c_i}} f(t)$ (où $0 < i \leq n$) les limites à gauche et à droite respectives de f aux divers points du découpage. On construit alors h en posant $h(c_0) = f(c_0)$, puis $h(t) = l_0^+$ pour $a = c_0 < t < c_1$, puis $h(c_1) = l_0^+ - l_1^- + f(c_1)$, puis $h(t) = l_0^+ - l_1^- + l_1^+$ pour $c_1 < t < c_2$. Plus généralement, on pose $h(t) = l_0^+ - l_1^- + l_1^+ + \cdots - l_i^- + l_i^+$ pour $c_i < t < c_{i+1}$, et $h(c_i) = l_0^+ - l_1^- + l_1^+ + \cdots - l_i^- + f(c_i)$. Par construction, h est en escalier.

Posons maintenant $g = f - h$: la relation $f = g + h$ ne pose pas de problèmes, la seule chose à vérifier est la continuité de g. Celle-ci est évidente en tout t autre qu'un des points c_i et en chacun de ceux-ci elle demande une vérification ; pour $i = 0$ on compare $g(c_0) = f(c_0) - h(c_0) = 0$ à $\lim\limits_{\substack{t \to c_0 \\ c_0 < t}} g(t) = \lim\limits_{\substack{t \to c_0 \\ c_0 < t}} f(t) - \lim\limits_{\substack{t \to c_0 \\ c_0 < t}} h(t) = l_0^+ - l_0^+ = 0$ pour conclure à la continuité en $c_0 = a$; pour $0 < i < n$ on compare d'une part $g(c_i) = f(c_i) - h(c_i) = f(c_i) - \big(l_0^+ - l_1^- + l_1^+ + \cdots - l_i^- + f(c_i)\big) = -l_0^+ + l_1^- - l_1^+ + \cdots + l_i^-$, d'autre part $\lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ t < c_i}} g(t) = \lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ t < c_i}} f(t) - \lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ t < c_i}} h(t) = l_i^- - (l_0^+ - l_1^- + l_1^+ + \cdots - l_{i-1}^- + l_{i-1}^+) = -l_0^+ + l_1^- - l_1^+ + \cdots + l_i^-$ et enfin $\lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ c_i < t}} g(t) = \lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ c_i < t}} f(t) - \lim\limits_{\substack{t \to c_i \\ c_i < t}} h(t) = l_i^+ - \big(l_0^+ - l_1^- + l_1^+ + \cdots - l_i^- + l_i^+\big) = -l_0^+ + l_1^- - l_1^+ + \cdots + l_i^-$ pour conclure à la continuité de g en x_i ; et pour $i = n$ on fait la même vérification (mais à gauche seulement de $x_n = b$).

•

La simplicité de ce lemme explique je l'espère *a posteriori* pourquoi on a introduit dans la définition des fonctions continues par morceaux la compliquée condition d'existence de limites à droite et à gauche.

2 - Primitives et primitives par morceaux

Pour des fonctions continues, la bonne notion de "primitive" sera celle à laquelle on s'attend :

Définition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f, F deux fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$, où la fonction f est continue. On dit que F est une **primitive** de f lorsque f est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$.

Pour des fonctions continues par morceaux, il faut renoncer à avoir la relation $F' = f$ en tout point de l'intervalle : c'est désespéré aux éventuelles discontinuités de f. On perdra donc la dérivabilité de F ; notez bien que la définition suivante exige la continuité de F.

Définition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f, F deux fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$, où la fonction f est continue par morceaux. On dit que F est une **primitive par morceaux** de f lorsque F est continue sur $[a, b]$, dérivable sauf peut-être en un nombre fini de points et on a l'identité $F'(t) = f(t)$, sauf peut-être en un nombre fini de points.

Ce concept est le bon pour pouvoir intégrer les fonctions en escalier.

Proposition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f une fonction en escalier sur $[a, b]$. La fonction f admet (au moins) une primitive par morceaux.

Démonstration : Soit Soit $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ un découpage de l'intervalle $[a, b]$ tel que f soit constante sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$. Notons d_i la valeur constante de f sur $]c_i, c_{i+1}[$ (pour $O \leq i < n$).

On construit tout à fait explicitement F en posant $F(c_0) = 0$, puis pour $a = c_0 < t \leq c_1$, $F(t) = d_0(t - c_0)$, puis plus généralement pour $c_i < t \leq c_{i+1}$, $F(t) = d_0(c_1 - c_0) + d_1(c_2 - c_1) + \cdots + d_i(t - c_i)$.

Avec ces formules, il est clair que F est dérivable sauf peut-être aux points c_i (avec $0 \leq i < n$) (qui sont en nombre fini) et que sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ sa dérivée vaut d_i donc coïncide avec f. Le seul point à vérifier est la continuité de F en chaque c_i (et la continuité à gauche est évidente) ; la seule chose à faire est donc de comparer la valeur de $F(c_i)$ qui est $d_0(c_1 - c_0) + d_1(c_2 - c_1) + \cdots + d_{i-1}(c_i - c_{i-1})$ et sa limite à droite, qui est la limite quand t tend vers c_i de $d_0(c_1 - c_0) + d_1(c_2 - c_1) + \cdots + d_i(t - c_i)$, soit $d_0(c_1 - c_0) + d_1(c_2 - c_1) + \cdots + d_{i-1}(c_i - c_{i-1}) + 0$: on retrouve la même chose.

•

L'intérêt des primitives par morceaux est que certains résultats du cours de dérivation sont encore vrais avec cette notion un peu étendue.

Proposition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f, F deux fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$, où la fonction f est continue par morceaux et F est une primitive par morceaux de f.

Alors F est croissante si et seulement si f est positive sauf peut-être en un nombre fini de points.

Démonstration : Une implication est claire : si F est croissante, là où elle est dérivable sa dérivée est positive, donc f est positive sauf peut-être en un nombre fini de points.

Réciproquement, supposons f positive sauf peut-être en un nombre fini de points. En ajoutant à ces points les points éventuels où l'égalité $F'(t) = f(t)$ n'est pas vraie, et éventuellement aussi les points a et b, on en déduit qu'il existe un nombre fini de points $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ tels que sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ la fonction F est dérivable et de dérivée positive. On en déduit que la fonction F est croissante sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$. Comme on a supposé en outre la fonction F continue (c'est là qu'on s'en sert de façon cruciale) on peut passer à la limite quand s tend vers c_i à droite dans l'inégalité $f(s) \leq f(t)$ pour $c_i < s \leq t < c_{i+1}$ et déduire que $f(c_i) \leq f(t)$; en agissant de même à gauche de c_{i+1} on montre ainsi la croissance de F sur chaque intervalle fermé $[c_i, c_{i+1}]$. Ceci entraîne évidemment la croissance de F sur $[a, b]$ tout entier.

•

Proposition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f, F deux fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$, où la fonction f est continue par morceaux et F est une primitive par morceaux de f.

Alors F est constante si et seulement si f est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition précédente d'une part à f et F et d'autre part à $-f$ et $-F$.

•

Corollaire : Deux primitives par morceaux d'une même fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné diffèrent d'une constante.
Démonstration : Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même f continue par morceaux. Alors $F_1 - F_2$ est continue, dérivable sauf peut-être en un nombre fini de points, et sa dérivée est égale à $f - f = 0$ sauf peut-être en un nombre fini de points : $F_1 - F_2$ est donc une primitive par morceaux de la fonction nulle, donc une constante.
•

Pour des primitives par morceaux, le théorème des accroissements finis dans sa version la plus précise (existence d'un c) peut échouer, mais il reste une inégalité.
Proposition : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f, F deux fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$, où la fonction f est continue par morceaux et F est une primitive par morceaux de f.

Soit M un réel fixé ; on suppose que pour tout t de $[a, b]$ (ou même sauf peut-être un nombre fini de t) on a l'inégalité : $f(t) \leq M$. Alors :

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \leq M.$$

Démonstration : Posons $g(t) = M - f(t)$ et $G(t) = Mt - F(t)$. Il est alors immédiat de vérifier que G est une primitive par morceaux de g et que g est positive (sauf peut-être en un nombre fini de points). La fonction G est donc croissante, donc $G(a) \leq G(b)$, soit $Ma - F(a) \leq Mb - F(b)$, soit $F(b) - F(a) \leq M(b - a)$.
•

3 - Les fonctions continues ont des primitives

Théorème : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f une fonction continue de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$.

Alors f admet au moins une primitive F.

Les primitives de f sont exactement les fonctions $F + c$ où c est une fonction constante.
Démonstration : Le dernier point est évident et découle simplement de la caractérisation des fonctions constantes comme fonctions de dérivée nulle. Toute la difficulté (et elle n'est pas petite) consiste à prouver l'existence d'au moins une primitive. Il faut bien être conscient qu'elle existe, mais qu'on ne la trouvera pas par une formule : pour des fonctions continues simples, comme $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ les primitives existent mais ne se laissent pas calculer.
La méthode va consister à approcher f par des fonctions en escalier, dont on sait trouver des primitives (par morceaux) puis passer à la limite à partir de ces primitives par morceaux.
Pour cela, il va falloir avaler quelques notations. Notons, pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $x_n^{(k)} = a + \dfrac{k(b - a)}{n}$. Dit avec des mots :

"$x_n^{(k)}$ est l'extrémité droite du k-ème morceau du découpage de $[a, b]$ en n parts égales"

Soit maintenant f_n (pour $n \geq 1$) la fonction en escalier définie sur $[a, b]$ par :

pour $x_n^{(k)} \leq t < x_n^{(k+1)}$, $f_n(t) = f(x_n^{(k)})$ (et $f_n(b) = f(b)$).

Avec des mots :

"f_n est la fonction en escalier, constante sur chaque morceau du découpage de $[a, b]$ en n parts égales, qui prend sur chacun de ces morceaux la valeur que prend f à son extrémité gauche".

Préalablement à la construction, on va montrer l'**affirmation 1** suivante, cruciale pour la démonstration :
Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $t \in [a, b]$, $|f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$.
(Avec un mot du programme de deuxième année, "f_n tend uniformément vers f").
Preuve de l'affirmation 1 (par l'absurde) : Supposons que ce soit faux. Il existerait alors un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$, il existe un $n_N \geq N$ et un $t_N \in [a, b]$ tels que $\epsilon < |f_{n_N}(t_N) - f(t_N)|$.
Pour chaque $N \geq 1$, notons s_N l'extrémité gauche de l'intervalle du découpage régulier de $[a, b]$ en n_N morceaux auquel appartient t_N. Ainsi $s_N \leq t_N$ et $t_N - s_N < \dfrac{b - a}{n_N} \leq \dfrac{b - a}{N}$, donc $s_N - t_N \to 0$ quand $N \to \infty$. De plus par définition des f_n, $f_{n_N}(t_N) = f(s_N)$. L'inégalité $\epsilon < |f_{n_N}(t_N) - f(t_N)|$ se réécrit donc plus brièvement $\epsilon < |f(s_N) - f(t_N)|$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite-extraite $(t_{\varphi(N)})$ de (t_N) qui admette une limite l. Comme $s_N - t_N \to 0$ quand $N \to \infty$, la suite $(s_{\varphi(N)})$ converge aussi vers l. En passant à la limite dans l'inégalité $\epsilon < |f(s_{\varphi(N)}) - f(t_{\varphi(N)})|$, on obtient $\epsilon \leq |f(l) - f(l)| = 0$. Ce qui est contradictoire.
L'affirmation 1 est donc démontrée.

On sait désormais assez sur les f_n pour avancer dans la construction. Chaque f_n est une fonction en escalier ; elle admet donc des primitives par morceaux. Notons F_n la primitive de f_n telle que $F_n(a) = 0$.

Affirmation 2 : Pour chaque $t \in [a, b]$ fixé, la suite $(F_n(t))$ est une suite de Cauchy.
Preuve de l'affirmation 2 : Fixons un $t \in [a, b]$; si $t = a$ le résultat est évident (tous les $F_n(t)$ sont nuls) ; on supposera donc $a < t$.
Appliquons l'affirmation 1 au réel $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2(t-a)}$. Elle nous fournit un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $s \in [a, b]$, on ait $|f_n(s) - f(s)| \leq \epsilon_1$.
On en déduit que pour tous p, q avec $p \geq q \geq N$, et tout $s \in [a, b]$, on a :

$$|f_p(s) - f_q(s)| = |(f_p(s) - f(s)) + (f(s) - f_q(s))| \leq |f_p(s) - f(s)| + |f(s) - f_q(s)| \leq 2\epsilon_1.$$

Notons maintenant que $F_p - F_q$ est une primitive par morceaux de $f_p - f_q$ et appliquons la variante des accroissements finis de la section précédente aux inégalités $f_p - f_q \leq 2\epsilon_1$ et $f_q - f_p \leq 2\epsilon_1$, valables sur tout l'intervalle $[a, b]$, donc sur tout l'intervalle $[a, t]$. On en déduit que

$$(F_p - F_q)(t) - (F_p - F_q)(a) \leq 2\epsilon_1(t-a) \leq \epsilon$$

et symétriquement en échangeant p et q, c'est-à-dire exactement (en se souvenant que $F_p(a) = F_q(a) = 0$) l'inégalité $|F_p(t) - F_q(t)| \leq \epsilon$.
L'affirmation 2 est bien prouvée.

Arrivé à ce point des constructions, on en déduit que pour chaque t fixé, la suite de Cauchy $(F_n(t))_{n \geq 1}$ est une suite convergente. Notons $F(t)$ sa limite. La fonction F va être la primitive cherchée... Reste encore à le montrer. Ce n'est pas franchement astucieux, mais tout de même un peu indigeste parce qu'un peu lourd. Il faut en effet revenir à la définition même d'une dérivée comme limite...
Soit donc un $t_0 \in [a, b]$ fixé, et un $\epsilon > 0$ fixé. L'objectif sera de trouver un $\eta > 0$ tel que dès que $|t - t_0| \leq \eta$ (avec $t \in [a, b]$), on ait :

$$|f(t_0) - \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}| \leq \epsilon.$$

Pour ce faire, commençons par appliquer la définition de “continuité” à f au point t_0 et à $\dfrac{\epsilon}{2}$; ceci nous fournit un $\eta > 0$ tel que pour $|s - t_0| \leq \eta$ (avec $s \in [a, b]$), on ait : $|f(s) - f(t_0)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.
Appliquons alors l'affirmation 1 à $\dfrac{\epsilon}{2}$; elle nous garantit l'existence d'un $N \geq 1$ tel que pour $n \geq N$, on ait pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - f_n(t)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. On a alors pour tout $s \in [a, b]$ tel que $|s - t_0| \leq \eta$ et tout $n \geq N$:

$$|f_n(s) - f(t_0)| = |(f_n(s) - f(s)) + (f(s) - f(t_0))| \leq |f_n(s) - f(s)| + |f(s) - f(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Remarquons maintenant que la fonction auxiliaire G_n définie par $G_n(t) = F_n(t) - tf(t_0)$ est une primitive par morceaux de la fonction en escalier $f_n - f(t_0)$. Dès que l'on prend un $t \in [a, b]$ tel que $|t - t_0| \leq \eta$, on a pour tout point s du segment fermé d'extrémités t_0 et t les inégalités

$$f_n(s) - f(t_0) \leq \epsilon \qquad \text{et} \qquad f(t_0) - f_n(s) \leq \epsilon$$

dont on déduit (encore une fois par la proposition améliorant les accroissements finis) les inégalités :

$$-\epsilon \leq \frac{G_n(t) - G_n(t_0)}{t - t_0} \leq \epsilon.$$

Mais $\dfrac{G_n(t) - G_n(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} - f(t_0)$: on a donc prouvé (pour tout $n \geq N$ et tout $t \in [a, b]$ tel que $|t - t_0| \leq \eta$) l'inégalité :

$$|f(t_0) - \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0}| \leq \epsilon.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini dans cette inégalité pour obtenir l'inégalité cherchée. •

Théorème : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$) et f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$.

Alors f admet au moins une primitive par morceaux F.

Les primitives par morceaux de f sont exactement les fonctions $F + c$ où c est une fonction constante.

Démonstration : Là aussi la dernière affirmation est facile (du moins une fois qu'on a préparé le terrain en ayant étudié les primitives par morceaux de zéro).

Pour la première affirmation on a aussi préparé le terrain : écrivons $f = g + h$ où g est continue et h en escalier. Le théorème précédent permet de trouver une primitive de g et on sait déjà (on s'en est abondamment servi pour prouver le théorème précédent...) que h admet des primitives par morceaux. On obtient F en additionnant primitive de g et primitive par morceaux de h. •

4 - La notation intégrale

Définition : Soit a et b deux réels et f une fonction réelle d'une variable réelle, continue par morceaux sur un intervalle contenant a et b.

On appelle l'**intégrale** de f entre a et b le réel $F(b) - F(a)$ calculé à l'aide d'une primitive par morceaux de f.

Notation : Ce réel est noté, comme tout le monde le sait bien, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

On notera aussitôt que cette définition a un sens, d'une part parce que les primitives par morceaux de f existent et d'autre part parce qu'elles diffèrent d'une constante, ce qui garantit que le résultat ne dépend pas de la primitive utilisée pour le calcul.

Les résultats suivants sont évidents avec ce choix de définition :

Proposition : Soit a, b et c trois réels, et f une fonction réelle d'une variable réelle, continue par morceaux sur un intervalle contenant a, b et c. Alors :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Démonstration : C'est stupide : c'est simplement dire que $F(c) - F(a) = (F(c) - F(b)) + (F(b) - F(a))$. •

Proposition : Soit f une fonction continue à valeurs réelles définie sur un intervalle I, et soit a un point de I. Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Démonstration : Cela découle de la définition, et de l'information supplémentaire selon laquelle les fonctions continues ont mieux que des primitives par morceaux, à savoir de "vraies" primitives. •

Les énoncés suivants ne sont pas aussi grossièrement évidents, mais sont de simples reformulations des résultats énoncés sur les fonctions continues par morceaux.

Proposition : Soit $a \leq b$ deux réels, et f une fonction à valeurs réelles positive continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est positive.

Démonstration : C'est parce que toute primitive par morceaux de la fonction positive f est croissante. •

Proposition : Soit $a \leq b$ deux réels et f une fonction à valeurs réelles continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que pour tout t de $[a, b]$ (ou même sauf peut-être un nombre fini de t) on a l'inégalité : $f(t) \leq M$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a).$$

Démonstration : C'est simplement la réécriture de la proposition qui étend le théorème des accroissements finis, avec une nouvelle notation.

•

Remarques : * On peut aussi obtenir une variante de la précédente si on suppose f continue (et non seulement continue par morceaux) et en utilisant la vraie égalité des accroissements finis. Je laisse en exercice la détermination de l'énoncé que l'on obtient.
* Il ne faut pas oublier l'hypothèse $a \leq b$ dans les énoncés ci-dessus : si $b < a$ c'est à $[b, a]$ qu'on peut appliquer la croissance de F et l'inégalité se renverse ; de même pour l'inégalité des accroissements finis, la multiplication par un $b - a$ strictement négatif renverserait l'inégalité. Méfiance donc.
Proposition : Soit $a \leq b$ deux réels et f une fonction à valeurs réelles continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Démonstration : On remarque que sur $[a, b]$ la fonction $|f(t)| - f(t)$ est positive ainsi que la fonction $|f(t)| + f(t)$. On obtient donc les inégalités

$$0 \leq \int_a^b (|f(t)| - f(t))\ dt \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \int_a^b (|f(t)| + f(t))\ dt$$

d'où

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

d'où l'inégalité annoncée.

•

Remarque : On remarquera l'analogie entre cette inégalité et l'inégalité triangulaire : même pour la "somme" infinie qu'est l'intégrale, la valeur absolue de la somme est plus petite que la somme des valeurs absolues.

J'ai aussi traité en amphi l'inégalité de Schwarz ; si je ne change pas d'avis d'ici demain, je parlerai aussi de changement de variables et de sommes de Riemann.

Intégrales généralisées

1 - Extension d'une définition

Définition : Soit I un intervalle dans $\mathbf{R}$, et f une fonction de I vers $\mathbf{R}$. On dira que f est **continue par morceaux** sur I lorsque pour tous $a < b$ dans I, la restriction de f à $[a, b]$ est continue par morceaux.

Ainsi, lorsque l'intervalle n'est pas fermé borné, il est possible que les fonctions continues par morceaux aient un nombre infini de discontinuités. L'archétype d'une telle fonction étant la fonction partie entière ; avec un peu d'effort il n'est pas inintéressant de prendre le temps de trouver un exemple de fonction continue par morceaux définie sur $]0, 1]$ qui aurait elle aussi une infinité de discontinuités (mais ce genre de bizarreries ne joue aucun rôle privilégié dans ce qui suit, rassurons-nous tout de suite).

2 - Intégrales généralisées - La définition

Dans cette section et toute la suite, I désignera un intervalle (non vide) de la forme $[m, b[$ ou $]m, b[$ (notation dans laquelle les lettres m et b peuvent désigner des réels ou des extrémités infinies), qu'on supposera **ouvert** du côté de b. Bien évidemment, tout ce qu'on fait à droite se transpose de façon évidente à gauche, ou lorsque les bornes de l'intégrale ont été écrites à l'envers ; quelques remarques seront faites plus bas sur ce qu'il faut comprendre quand l'intervalle est ouvert des deux côtés.

Dans toute la suite a désignera un point de I.

Définition : Soit f une fonction continue par morceaux définie sur I. On dit que l'intégrale de f **converge** en b lorsque l'intégrale $\int^x f(t)\,dt$ possède une limite (finie) quand x tend vers b (par valeurs inférieures). Dans le cas contraire (c'est-à-dire en cas de limite infinie, ou d'absence de limite), on parlera de divergence.

Un petit détail est à régler pour être certain de la cohérence de cette définition : alors que la lettre a ne figure pas dans la proposition *"l'intégrale de f converge"*, elle apparaît dans l'autre côté de la définition. Il faut donc nous convaincre que la convergence, apparemment dépendante du choix de a, n'en dépend pas en réalité. Mais ceci découle immédiatement de la relation de Chasles. Ouf nous n'avons pas écrit un non-sens, nous pouvons poursuivre.

Définition : L'**intégrale généralisée** de f entre a et b est égale, lorsqu'elle existe, à la limite évoquée à la définition précédente. On parle aussi d'**intégrale impropre**. On la note alors $\int_a^b f(t)\,dt$. Lorsqu'on veut souligner son caractère généralisé à un lecteur possiblement distrait (notamment quand b est réel), on pourra être plus soigneux et la noter occasionnellement $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$. Lorsque l'intégrale diverge parce qu'elle a une limite infinie, on osera parfois écrire des identités comme "$\int_a^{\to b} f(t)\,dt = +\infty$" (en restant prudent ! On a si vite fait d'écrire dans un moment de distraction une expression inutilisable de la forme $+\infty - \infty$).

Comme promis une observation sur ce qu'il faut comprendre lorsque l'intervalle I est ouvert aux deux extrémités. Pour fixer les idées, précisons ce que signifie l'énoncé (vrai) *"L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge"*. Par convention, il voudra dire que **chacune** des deux intégrales généralisées $\int_{-\infty} te^{-t^2}\,dt$ et $\int^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge. (Pour prouver cette convergence, ce serait donc gaffer que d'examiner seulement des expressions symétriques comme $\int_{-x}^{x} te^{-t^2}\,dt$).

3 - Un cas stupide : l'intégrale faussement impropre

Cette section, assez anecdotique, ne concerne que le cas d'une borne b finie.

Examinons le cas particulier où f se laisse étendre en une fonction continue par morceaux à l'intervalle $I \cup \{b\}$, c'est-à-dire le cas où elle admet une limite en b (et, petite technicité sur laquelle je glisse car elle est liée aux insuffisances de la théorie de l'intégration que j'ai choisi d'utiliser et donc peu profonde, où le nombre de discontinuités dans $[a, b[$ est néanmoins fini).

On dispose alors en principe de deux concepts qu'on note tous deux de la même façon $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$: l'un désigne l'intégrale (ordinaire) de la fonction f vue comme fonction définie sur $[a, b]$, l'autre désigne l'intégrale (généralisée) de la foncion f vue comme fonction définie sur $[a, b[$. Il serait fort gênant que ces deux définitions représentent des réels distincts. Rassurons-nous immédiatement, ce n'est pas le cas. Cela est dû à la continuité des primitives par morceaux : si on note $F\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ une primitive par morceaux de f sur $[a, b[$, les définitions respectives de l'intégrale ordinaire et de l'intégrale généralisée se développent en $F(b) - F(a)$ pour la première, et en $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) - F(a)$ pour la seconde. La continuité de F au point b garantit l'égalité de ces deux réels.

On parle occasionnellement d'intégrale **faussement impropre** pour désigner ce phénomène sans grand intérêt ; contentons nous ici de souligner qu'on vient de montrer que, si ça nous arrange, on peut parfois prolonger f à un intervalle plus gros avant de l'intégrer pour éviter d'invoquer le concept d'intégrale généralisée, sans que cela ne soit source d'erreurs.

4 - La méthode du sandwiche

Sur le résultat suivant, pas bien difficile à prouver, repose toute la théorie :

Proposition : Soit $g_1 \leq f \leq g_2$ trois fonctions de I vers $\mathbf{R}$. Si les intégrales de g_1 et de g_2 convergent en b, l'intégrale de f aussi.

Démonstration : Transformons préalablement l'encadrement en le réécrivant :

$$0 \leq f - g_1 \leq g_2 - g_1.$$

L'hypothèse de convergence des intégrales de g_1 et g_2 assure la convergence de l'intégrale de $g_2 - g_1$.

Soit $x \in [a, b[$. De l'inégalité entre fonctions résulte l'inégalité entre intégrales :

$$\int_a^x (f(t) - g_1(t))\,dt \leq \int_a^x (g_2(t) - g_1(t))\,dt.$$

Pensons les deux intégrales qui interviennent dans la formule ci-dessus comme des fonctions de x variable. Comme les fonctions intégrées sont positives, ces deux fonctions sont croissantes. De plus celle de droite admet par hypothèse une limite quand $x \to b^-$, donc est majorée. Celle de gauche est donc aussi une fonction croissante majorée. À ce titre, elle admet nécessairement une limite pour $x \to b^-$. C'est donc que l'intégrale de $f - g_1$ converge ; l'intégrale de f converge donc aussi.

•

Remarquons que ça ressemble au très facile "théorème des gendarmes" en première lecture, mais que c'est en réalité plus subtil. Si on ne pense pas à soustraire préalablement f et qu'on se contente d'intégrer préalablement entre a et x les trois fonctions, on se retrouve avec un encadrement

$$\int_a^x g_1(t)\,dt \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g_2(t)\,dt$$

devant lequel on reste perplexe : la quantité que nous voulions étudier a bien été contrôlée, et demeure bloquée entre deux gendarmes... Mais comme ces deux gendarmes ne vont pas au même endroit, on ne peut rien conclure. Dans le même esprit, notons que tandis que le "théorème des gendarmes" montre une convergence et calcule simultanément la limite, notre "principe du sandwiche" ne donne aucune information sur la valeur limite, et ne permet en rien de calculer l'intégrale de f entre a et b.

On mettra en parallèle la très facile

Proposition : Soit g et f continues par morceaux sur I avec $g \leq f$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = +\infty$. Alors l'intégrale de f en b diverge elle aussi (et vaut elle aussi $+\infty$).

Démonstration : Ce coup-ci c'est tout facile : il suffit d'appliquer la version à l'infini des gendarmes à l'inégalité entre les intégrales de g et f entre a et x.

•

5 - Première application du sandwiche : fonction bornée en une borne finie

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la méthode précédente, qui mérite peut-être d'être soulignée.

Proposition : On suppose ici que b est un réel (donc n'est **pas** infini).

Soit f une fonction continue par morceaux et bornée sur I. Alors l'intégrale de f est convergente en b.

Démonstration : Puisque f est bornée, on peut l'encadrer sur $[a, b[$ entre deux constantes, soit écrire une inégalité $m \leq f \leq M$. Il n'y a plus qu'à s'apercevoir que les constantes ont des intégrales évidemment convergentes en b (par exemple parce qu'elles sont faussement impropropres) pour conclure.

•

6 - Deuxième application du sandwiche : la convergence absolue

Définition : Soit f continue par morceaux sur I. On dit que l'intégrale de f **converge absolument** en b lorsque l'intégrale de $|f|$ converge.

Proposition : La convergence absolue entraîne la convergence.

Démonstration : On suppose f absolument convergente, et on écrit l'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$. Mais voici f en sandwiche entre deux fonctions à intégrale convergente. Inexorablement, voici son intégrale forcée de converger aussi.

•

On notera que la réciproque est fausse ; les exemples ne sautent pas aux yeux et on en rencontrera un seulement en fin de chapitre.

7 - Interaction avec équivalents et développements limités

Proposition : Soit f et g deux fonctions de I vers $\mathbf{R}$, supposées équivalentes au voisinage de b.

On suppose en outre que l'une au moins de ces deux fonctions est **de signe constant**.

Alors $\displaystyle\int^b f$ et $\displaystyle\int^b g$ sont de même nature.

Démonstration : Avant de commencer la démonstration proprement dite, un préalable. Du fait que les fonctions sont équivalentes, elles ont nécessairement le même signe au voisinage de b. Donc l'hypothèse de constance du signe de l'une entraîne la constance du signe de l'autre (du moins à condition de rapetisser suffisamment I, ce qui ne change rien au problème de la convergence des intégrales).

Ceci posé, les hypothèses sont désormais symétriques sur f et g ; il nous suffit donc de montrer que si $\displaystyle\int^b f$ converge, $\displaystyle\int^b g$ aussi. Pour fixer les notations, on écrira la preuve en supposant $b = +\infty$ et $f \geq 0$.

Supposons donc la convergence de $\displaystyle\int f$. En appliquant la définition de fonctions équivalentes à $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ (et en la vulgarisant de façon à oublier les possibles annulations -forcément simultanées- de f et g), il existe un $M \in \mathbf{R}$ tel que pour $M \leq t$,

$$\left|\frac{g(t)}{f(t)} - 1\right| \leq \frac{1}{2}, \text{ ou encore}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{g(t)}{f(t)} \leq \frac{3}{2}.$$

On utilise alors ici de façon cruciale la positivité de f pour en déduire que

$$\frac{f(t)}{2} \leq g(t) \leq \frac{3f(t)}{2}.$$

Et voilà g en sandwiche entre deux fonctions à intégrale convergente : son intégrale converge aussi.

•

Proposition : Soit f et g deux fonctions de I vers $\mathbf{R}$. On suppose que $g = o(f)$ au voisinage de b.

On suppose en outre que la fonction f est **de signe constant**.

Alors si $\int^b f$ converge, alors $\int^b g$ converge aussi.

Démonstration : C'est exactement le même principe : on applique dans un premier temps la définition du petit o à $\epsilon = \dfrac{1}{2}$; on obtient un intervalle finissant en b sur lequel on dispose de l'inégalité :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{g(t)}{f(t)} \leq \frac{1}{2}$$

Puis on profite de la positivité de f pour multiplier :

$$-\frac{1}{2}f(t) \leq g(t) \leq \frac{1}{2}f(t).$$

Et hop, voilà g en sandwiche.

•

Il y a des contre-exemples quand l'hypothèse de signe constant est manquante ; ils ne sautent pas du tout aux yeux !

8 - Un catalogue d'intégrales à connaître

Le principe de cette section est simple : depuis la section précédente, on sait utiliser les outils à base d'ordres de grandeurs pour élucider la convergence des intégrales ; on ramènera l'étude d'une intégrale compliquée à celle de l'intégrale infiniment plus simple d'un équivalent de la fonction qui nous interpelle.

Il ne reste donc plus qu'à dresser un catalogue des fonctions d'aspect simple, et savoir pour chacune d'elles si l'intégrale converge ou non. Je le traiterai naturellement en amphi, et –essentiellement pour raisons de complexité typographique– me dispense de frapper cette section **pourtant tout à fait essentielle** et renvoie donc le lecteur aux notes qu'il ne manqua pas de prendre en cours.

9 - Relations entre convergence et existence d'une limite

Il y a des implications simples, essentiellement faciles à prouver, entre la convergence des intégrales et l'existence d'une limite pour f. Les résultats justes sont tout à fait évidents, attention à ne pas imaginer des résultats faux plausibles !

Proposition :

* En une borne b finie, si la fonction f admet une limite réelle alors $\int^b f$ converge ;

* En une borne b infinie, si la fonction f admet une limite réelle non nulle ou tend vers $+\infty$, alors $\int^b f$ diverge.

Démonstration :

* En une borne finie, si f tend vers une constante m non nulle, on utilise le critère des équivalents pour la comparaison $f \sim m$; si f tend vers 0, on utilise le critère des petits o pour la comparaison $f = o(1)$.

* En une borne infinie, si f tend vers une constante m non nulle, là aussi le critère des équivalents ; si f tend vers $+\infty$, après avoir noté que cela entraîne que le signe de f est constant pour $|t|$ assez grand, on utilise la comparaison $1 = o(f)$.

•

Il n'est pas du tout inintéressant de chercher des contre-exemples pour tous les énoncés faux qui pourraient vous venir en tête.

Vous devez savoir citer, sans hésiter plus d'un dixième de seconde :

* une fonction f qui admet une limite infinie en 0 mais dont l'intégrale converge ;

* une fonction f qui tend vers 0 en $+\infty$ mais dont l'intégrale diverge.

Il n'est pas très difficile de fournir :

* une fonction f dont l'intégrale converge en 0 mais qui n'admet pourtant pas de limite.

Il n'est pas immédiat mais est instructif de savoir imaginer :

* une fonction f dont l'intégrale converge en $+\infty$ mais qui ne tend pas vers zéro.

10 - Un exemple d'intégrale non absolument convergente

Ce genre d'exemple ne saute pas aux yeux, et d'ailleurs même quand on connaît l'exemple il n'est pas si facile de montrer, d'un côté qu'il y a convergence, de l'autre qu'il n'y a pas convergence absolue.

On traitera en cours l'exemple suivant :

Exemple méritant d'être connu : la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ a une intégrale qui converge au voisinage de $+\infty$ mais qui ne converge pas absolument.

Si on a une bonne mémoire, il peut être utile à moyen terme de se souvenir que cette démonstration est basée sur une intégration par parties.

C'est en bidouillant des exemples de la même eau qu'on parvient à produire des exemples pas évidents de fonctions équivalentes dont l'intégrale n'est pas de même nature.