Quelques compléments sur les fonctions d'une variable réelle

1 - Critère séquentiel pour l'étude des limites

Proposition : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. Soit a un réel adhérent à $\mathcal{D}_f$ (ou soit a le symbole $+\infty$ ou $-\infty$, supposé adhérent à $\mathcal{D}_f$). Soit l un réel (ou le symbole $+\infty$, ou le symbole $-\infty$).

Alors $f(t) \rightarrow l$ quand $t \rightarrow a$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de $\mathcal{D}_f$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, $f(u_n) \rightarrow l$.

2 - Propriété de la limite monotone

Attention à un piège dans cette section : pour des suites, la variable n tend vers $+\infty$ et le théorème marchera de même pour des fonctions d'une variable t tendant vers $+\infty$ et aussi pour une limite **à gauche** finie. En revanche, pour prouver le résultat analogue en $-\infty$ ou en une limite à droite finie, c'est la minoration qui devra intervenir.

Proposition : Soit a un réel ou le symbole $+\infty$ et f une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ tel que a soit adhérent à $] - \infty, a[\cap \mathcal{D}_f$. On suppose f croissante. Alors

* Si f n'est pas majorée sur $] - \infty, a[\cap \mathcal{D}_f$, $f(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow a$, $t < a$.

* Si f est majorée sur $] - \infty, a[\cap \mathcal{D}_f$, $f(t)$ admet une limite quand $t \rightarrow a$, $t < a$. ; sa limite est égale à $\sup_{\substack{t \in \mathcal{D}_f \\ t < a}} f(t)$.

3 - Le critère de Cauchy pour des fonctions

Trop technique pour que je le maintienne dans une version "squelettique".

Fonctions continues, deuxième couche

1 - Critère séquentiel de continuité

Proposition : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et soit a un point de $\mathcal{D}_f$, supposé adhérent à $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$. Alors

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de $\mathcal{D}_f$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, $f(u_n) \rightarrow f(a)$ quand $n \rightarrow \infty$.

2 - Fonctions continues sur les intervalles fermés bornés

Théorème : Soit f une fonction réelle continue d'une variable réelle définie sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$. Alors il existe un $c_- \in [a, b]$ et un $c_+ \in [a, b]$ tel que pour tout $t \in [a, b]$ on ait :

$$f(c_-) \leq f(t) \leq f(c_+).$$

En d'autres termes, avec le vocabulaire désormais acquis concernant la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$: la fonction continue f est bornée, et l'ensemble des valeurs qu'elle prend admet un plus grand et un plus petit élément.

3 - Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : (des valeurs intermédiaires) Soit I un **intervalle** de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue de I vers $\mathbf{R}$. Soit $a \leq b \leq c$ trois réels. Si f prend les valeurs a et c , elle prend aussi la valeur b .

4 - Fonctions continues et monotonie

Théorème : 1 Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I .

On suppose que :

f est continue sur I .

f est strictement monotone sur I .

Alors il existe un intervalle J tel que la restriction de f de I vers J soit une bijection entre ces deux intervalles.

De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, est alors continue.

Théorème : 2 Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I .

On suppose que :

f est strictement monotone sur I .

Il existe un intervalle J tel que la restriction de f de I vers J soit une bijection entre ces deux intervalles.

Alors f est continue sur I .

De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, est alors continue.

Théorème : 3 Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I .

On suppose que :

Il existe un intervalle J tel que la restriction de f de I vers J soit une bijection entre ces deux intervalles.

f est continue sur I .

Alors f est strictement monotone sur I .

De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, est alors continue.

5 - Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème : Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I (non réduit à un point).

On suppose que f est continue sur I , et que la restriction de f de I vers l'intervalle $f(I)$ est bijective.

Soit a un point de I en lequel on suppose f dérivable, avec $f'(a) \neq 0$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Remarque : Pour énoncer la formule qui conclut ce théorème, on peut préférer donner une notation $b = f(a)$, et donc $a = f^{-1}(b)$; en centrant les notations sur b la formule devient :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}.$$

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Convention de notation :

Soit F un espace vectoriel réel de dimension finie, et f une application d'une variable réelle, à valeurs dans F . Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F ; pour chaque i entre 1 et n , on notera f_i l'application qui à un réel t associe la i -ème coordonnée du vecteur $f(t)$ dans la base $\underline{e}$.

Exemple de définition :

Définition : On dit que f est **dérivable** sur $\mathcal{D}_f$ lorsque toutes les f_i ($1 \leq i \leq n$) le sont.

On a justifié en cours pourquoi cette définition est cohérente, et j'ai énuméré assez inutilement dans la version longue de cette page toutes les définitions analogues qu'on pourrait songer à poser.

1 - Produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$

Définition : Le **produit scalaire** (“produit scalaire canonique” si on redoute des confusions) de deux vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$ est le réel $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Notation : Le produit scalaire de x par y est noté $x \cdot y$, ou $\langle x, y \rangle$.

Définition : La **norme** (ou “norme euclidienne canonique” si on redoute des confusions) d'un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ est le réel $\sqrt{\langle x, x \rangle}$, soit $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Notation : La norme euclidienne de x est notée $\|x\|$ (ou, si on redoute des confusions avec d'autres normes, $\|x\|_2$).

Proposition : Pour tous vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| && \text{ (“inégalité de Cauchy-Schwarz”)} \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| && \text{ (“inégalité triangulaire”)} \end{aligned}$$

Proposition : Soit f et g deux fonctions d'une même partie $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^n$. Soit a un point de $\mathcal{D}$ (supposé adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$). Si f et g sont toutes deux dérivables en a , alors $\langle f, g \rangle$ l'est aussi, et

$$\langle f, g \rangle'(a) = \langle f'(a), g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \rangle$$

2 - Accroissements finis : attention, pas d'égalité, seulement une inégalité!

Théorème : Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ (avec $a \neq b$) et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ supposée continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur le segment ouvert $]a, b[$. Soit M une constante réelle telle que pour tout t du segment $]a, b[$ on ait $\|f'(t)\| \leq M$.

$$\text{Alors } \left\| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right\| \leq M.$$

Remarque : Il faut faire attention à ce qu'il n'existe **pas** de proposition analogue avec une minoration des dérivées.

f au lieu de jouer sur f et f')

Proposition : Soit $a \leq b$ deux réels et f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Soit M une constante réelle telle que pour tout t de $[a, b]$ (ou même sauf un nombre fini de tels t) on ait $\|f'(t)\| \leq M$. Alors :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq M(b - a).$$

Proposition : Soit $a \leq b$ deux réels et f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$