

Un modèle de trafic routier

rapport de stage de fin de 1ère année à l'ENS

Valérie LE BLANC, maître de stage : P. DEGOND

5 septembre 2004

Introduction

Les modèles de trafic routier sont globalement inspirés des modèles de mécanique des fluides. On peut les regrouper en trois grandes catégories :

- les modèles particuliers, qui, dans le cas du trafic, sont les modèles 'Follow-the-Leader' (F-L),
- les modèles cinétiques,
- les modèles fluides.

Durant mon stage, je me suis essentiellement intéressée à ces derniers.

Les modèles fluides sont tous basés sur des équations de conservation correspondant à des flux observables. Il en existe deux sortes. Les modèles dit du premier ordre consistent en une seule équation de conservation, celle de la densité de voitures.

$$\partial_t n + \partial_x(q(n)) = 0.$$

Un modèle de ce type a été établi par Lighthill et Whitham.

Les modèles du second ordre sont des modèles du premier ordre auquel on a ajouté une équation. Un premier modèle de ce type a été proposé par Payne et Whitham :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + \partial_x(u + p) = 0, \end{cases}$$

mais Daganzo a ensuite montré que ce modèle donnait lieu à de nombreuses absurdités, comme par exemple le fait que les conducteurs changeraient de comportement suivant ce qu'il se passe derrière eux, ou bien le fait que des voitures se mettraient soudainement à reculer. Aw et Rascle ont ensuite développé un modèle proche de celui de Payne et Whitham qui remédie aux diverses déficiences originelles. De plus, il est possible de relier ce modèle au Follow-the-Leader.

Là encore il y a une limite ; en effet, en trafic routier, il semble légitime de supposer que la densité des véhicules reste bornée : la densité maximale correspondant au cas où les voitures sont pare-choc contre pare-choc. Or le système de Aw-Rascle ne permet pas de modéliser cela : dans ce système, les véhicules semblent pouvoir s'entasser. MM. Berthelin, Degond, Delitala, et Rascle ont remédié à ce problème en prenant une différence de vitesse p (ou pseudo-pression par analogie avec les modèles de mécanique des fluides) qui devient infinie quand la densité, i.e. le nombre de véhicules par unité de longueur de route, s'approche de la densité maximale n^* . Leur deuxième motivation était de construire une limite asymptotique dans laquelle la densité serait soit 0 (c'est le vide), soit n^* (c'est les bouchons), soit une valeur strictement comprise entre 0 et n^* (trafic fluide). Cette deuxième motivation est liée au fait que le comportement des conducteurs ne varie pas tant que la densité n'est pas très grande, mais varie soudainement devant une forte densité.

On peut également constater sur la route que la densité maximale pour des véhicules roulant vite, est plus faible que pour des véhicules à l'arrêt, et donc que la réaction se fera pour une plus faible

densité si la vitesse est élevée. Le but de mon stage a donc été de faire varier cette densité maximale en fonction de la vitesse, puis d'étudier le comportement asymptotique dans ce cas.

1 Sur les systèmes hyperboliques

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t U + A(U)\partial_x U = 0 \\ U(0, x) = U_0(x) \end{cases}$$

avec $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbf{R}^m, A : \mathbf{R}^m \rightarrow M_m(\mathbf{R})$.

Définition 1.1. *Le système est dit :*

- hyperbolique si pour tout U toutes les valeurs propres de $A(U)$ sont réelles,
- strictement hyperbolique si elles sont de plus distinctes deux à deux.

Soit $\lambda_1(U), \dots, \lambda_m(U)$ les valeurs propres de la matrice $A(U)$.

On suppose à présent que le système est strictement hyperbolique et on note $r_1(U), \dots, r_m(U)$ une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1(U), \dots, \lambda_m(U)$. On peut alors caractériser les comportements des solutions suivant certaines propriétés des valeurs propres.

Définition 1.2. *Un champ r_k ou une valeur propre $\lambda_k, k \leq m$ est dit :*

- vraiment non linéaire (VNL) si $\forall U, \nabla \lambda_k(U).r_k(U) \neq 0$,
- linéairement dégénéré (LD) si $\forall U, \nabla \lambda_k(U).r_k(U) = 0$.

⚡Attention : Ces définitions ne prennent pas en compte tous les cas.

Dans le cas d'un k -champ VNL les k -ondes simples solutions du problème de Riemann

$$U_0(x) = \begin{cases} U_g & \text{si } x < 0 \\ U_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sont soit des chocs à la vitesse σ , avec $\lambda_k(U_d) \leq \sigma \leq \lambda_k(U_g)$, soit des ondes de détente. Dans le cas d'un k -champ LD les k -ondes simples, solutions du problème de Riemann, sont des courbes de discontinuité de contact, se propageant à la vitesse $\sigma = \lambda_k(U_g) = \lambda_k(U_d)$. Localement, c'est-à-dire pour U_d dans un voisinage de U_g , on peut résoudre le problème de Riemann dans la classe des solutions constituées des états constants $U_g = U_0, U_1, \dots, U_m = U_d$ séparés par des k -ondes simples.

Dans le cas de la dimension 2, on a un résultat assez intéressant sur l'utilisation des invariants de Riemann.

Définition 1.3. *On appelle invariant de Riemann associé à la valeur propre λ_k , toute application w_k lisse, non constante et non nulle telle que $\forall U, \nabla w_k(U).r_k(U) = 0$.*

Proposition 1.4. *En dimension 2, si on a deux valeurs propres distinctes $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$ et un invariant de Riemann associé à chacune d'elle, $w_1(U)$ et $w_2(U)$, on peut diagonaliser le système sous la forme :*

$$\begin{cases} (\partial_t + \lambda_1(U)\partial_x)(w_2(U)) = 0 \\ (\partial_t + \lambda_2(U)\partial_x)(w_1(U)) = 0. \end{cases}$$

Parmi les systèmes hyperbolique on peut distinguer certains systèmes :

Définition 1.5. On appelle système de loi de conservation un système du type :

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x(f(U)) = 0 \\ U(0, x) = U_0(x) \end{cases}$$

avec $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Le lien avec les systèmes hyperboliques est fait par la relation : $A(U) = D_U f(U)$, vraie pour tout U .

Grâce à ces quelques notions sur les systèmes hyperboliques, nous allons pouvoir entamer l'étude du trafic routier. La section suivante sera consacrée à l'étude de l'article à la base de mon stage, puis on s'intéressera à l'étude du cas où n^* n'est pas une constante.

2 Le modèle de l'article

Cette partie est un simple résumé de l'article [2], auquel on peut se référer pour plus de détails.

2.1 Le modèle AR modifié

Soit $n(t, x)$ la densité de véhicules et $u(t, x)$ leur vitesse, en fonction de la position $x \in \mathbf{R}$ et du temps $t > 0$. Le modèle de Aw-Rascle (AR) est de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \\ (\partial_t + u\partial_x)(u + p(n)) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $p(n)$ est la différence de vitesse, c'est-à-dire la différence entre la vitesse préférée w (vitesse à laquelle le conducteur irait si il n'y avait pas d'autre voiture) et la vitesse réelle u . Ainsi, la deuxième équation du système peut être interprétée comme la conservation lagrangienne de la quantité w : toute voiture se déplaçant à la vitesse u conserve sa vitesse préférée.

On observe que ce modèle peut aussi se mettre sous forme conservative :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t(nw) + \partial_x(nwu) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

A partir de là, les auteurs ont démontré que le système admet des valeurs propres réelles et distinctes dès que la densité est non nulle :

$$\lambda_1 = u - np'(n) \leq \lambda_2 = u.$$

Il est donc strictement hyperbolique. De plus, λ_1 est VNL et λ_2 est LD, propriétés qui nous permettront de résoudre le problème de Riemann, de la manière expliquée dans la section précédente. Par ailleurs, en trouvant les invariants de Riemann, on peut diagonaliser le système, sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u - np'(n))\partial_x u = 0 \\ \partial_t w + u\partial_x w = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Par la méthode des caractéristiques, on montre alors que tout rectangle du plan (u, w) est une région invariante par le système, c'est-à-dire que si les conditions initiales u_0 et w_0 sont telles que $a \leq u_0 \leq b$, $c \leq w_0 \leq d$ alors les solutions u et w sont également bornées par les mêmes constantes.

Par contre, pour obtenir une borne sur n , ce qui semble plus naturel, p a été pris de la forme

$$p(n) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^*} \right)^{-\gamma}, \quad \text{avec } n \leq n^*.$$

Par ce biais, on interdit à la densité d'atteindre, et par conséquent de dépasser, la valeur n^* , qui ici est constante. On peut d'autre part observer que les conducteurs ne réduisent pas leur vitesse de façon significative tant que la densité reste inférieure à la densité maximale n^* . Pour prendre en compte ce phénomène, il suffit de changer p en εp , puis de prendre la limite du système ainsi obtenu quand ε tend vers 0.

2.2 Le modèle contraint de la dynamique des gaz sans pression (CPGD)

On cherche la limite du système Rescale modified AR (RMAR)

$$\begin{cases} \partial_t n^\varepsilon + \partial_x(n^\varepsilon u^\varepsilon) = 0 \\ (\partial_t + u^\varepsilon \partial_x)(u^\varepsilon + \varepsilon p(n^\varepsilon)) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

quand ε tend vers 0. Pour cela, on suppose que le couple $(n^\varepsilon, u^\varepsilon)$, solution de RMAR, converge vers une solution (n, u) d'un autre système qu'on appellera CPGD, et que si $n = n^*$ au point (t, x) alors $\bar{p}(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon p(n^\varepsilon)(t, x)$ est non nul et fini. On peut alors écrire la limite formelle du système RMAR :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \\ (\partial_t + u \partial_x)(u + \bar{p}) = 0 \\ 0 \leq n \leq n^*, \quad \bar{p} \geq 0, \quad (n^* - n)\bar{p} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

C'est un système contraint de la dynamique des gaz sans pression (CPGD). Afin d'obtenir des informations sur la dynamique à l'intérieur d'un bouchon, il faut regarder la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ des solutions du système RMAR telles que $n^\varepsilon \rightarrow n^*$. Après calculs, on obtient $\lambda_1^\varepsilon \rightarrow -\infty$. On en déduit que u est constante à l'intérieur d'un bouchon, c'est-à-dire dans tout intervalle d'espace dans lequel $n = n^*$.

Pour résoudre le problème de Riemann du CPGD :

$$(n^\varepsilon, u^\varepsilon)|_{t=0} = \begin{cases} (n_l, u_l), & \text{pour } x < 0 \\ (n_r, u_r), & \text{pour } x > 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

il faut d'abord résoudre le problème de Riemann du RMAR, puis étudier la convergence des solutions quand $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est ce qui sera brièvement présenté dans la partie suivante.

2.3 Le problème de Riemann pour le système CPGD

Je vais ici donner quelques pistes sur l'étude du problème de Riemann dans le cas du système RMAR, puis je donnerai quelques interprétations de la résolution du CPGD.

2.3.1 Le problème de Riemann pour le système RMAR

Nous savons que λ_1^ε est vraiment non linéaire donc les ondes simples associées sont soit des chocs, soit des ondes de détente. Par contre λ_2^ε est linéairement dégénérée. On en déduit que les ondes simples associées sont des discontinuités de contact. Les courbes de i -onde associées sont :

- pour $i = 1$, $u_r + \varepsilon p(n_r) = u_l + \varepsilon p(n_l)$, avec un choc si $n_r > n_l$ ou une onde de détente ;
- pour $i = 2$, $u_l = u_r$, avec une discontinuité de contact.

Une fois les courbes de i -onde connues, on résout le problème de Riemann dans le cas général. On obtient trois cas distincts : on a soit un choc suivi d'une discontinuité de contact, soit une onde de détente suivie d'une discontinuité de contact, soit l'apparition du vide $(0, u_r)$ entre l'onde de détente et la discontinuité de contact.

2.3.2 Le problème de Riemann pour le système CPGD

En faisant tendre ε vers 0, on obtient des résultats sur la résolution du problème de Riemann dans le cas du système CPGD. Il en ressort quatre cas distincts :

- si $n_l < n^*$, $u_l > u_r$, c'est-à-dire si les voitures de derrière vont plus vite que celles de devant, mais ne sont pas embouteillées, alors il y a formation d'un bouchon délimité à l'avant par une discontinuité de contact, et à l'arrière par un choc se propageant à la vitesse $\sigma = \frac{n^* u_r - n_l u_l}{n^* - n_l}$ (cf.fig1) ;

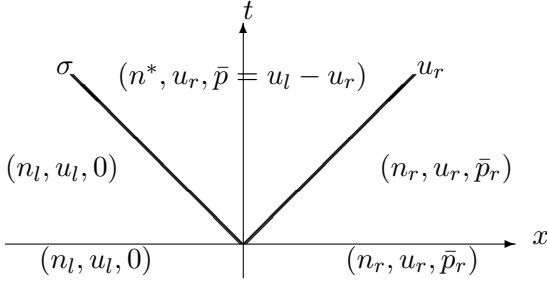


FIG. 1 - $n_l < n^*, u_l > u_r$

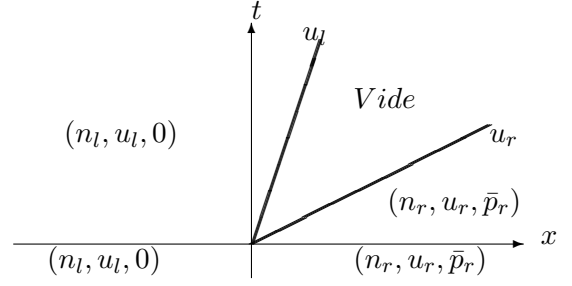


FIG. 2 - $n_l < n^*, u_l < u_r$

- si $n_l < n^*, u_l < u_r$, c'est-à-dire si les voitures de derrière vont moins vite que celles de devant mais vont à leur vitesse préférée (elles ne sont pas embouteillées), alors il y a apparition du vide entre les voitures de devant et celles de derrière (cf.fig2) ;
- si $n_l = n^*, u_l + \bar{p}_l > u_r$, c'est-à-dire si la vitesse préférée du bouchon de derrière est inférieure à la vitesse des voitures de devant, alors il y a transition instantanée de la vitesse u_l à la vitesse u_r dans la totalité du bouchon (cf.fig.3) ;
- si $n_l = n^*, u_l + \bar{p}_l < u_r$, c'est-à-dire si le bouchon de devant a une vitesse supérieure à la vitesse favorite du bouchon de derrière, alors le bouchon voit sa vitesse augmenter instantanément jusqu'à sa vitesse favorite, tandis qu'il se crée une zone de vide entre les dernières voitures de devant et les premières voitures de derrière (cf.fig.4).

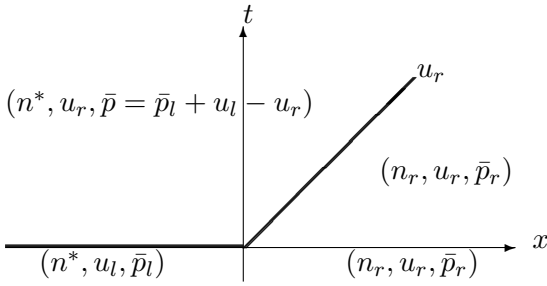


FIG. 3 - $n_l = n^*, u_l + \bar{p}_l > u_r$

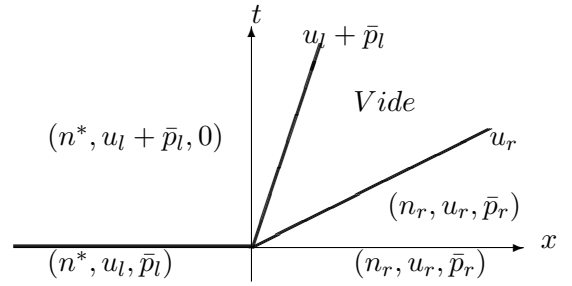


FIG. 4 - $n_l = n^*, u_l + \bar{p}_l < u_r$

2.4 Une démonstration d'existence pour le système CPGD

On sait maintenant résoudre le problème de Riemann dans le cas du système CPGD, et en particulier, si il concerne la rencontre de deux bouchons cette résolution est simple puisque on obtient instantanément un unique bouchon de vitesse constante. Donc si la condition initiale est constituée de bouchons de vitesses constantes séparés par des zones de vide, on pourra sans difficulté trouver une solution au système. Or on voudrait avoir une démonstration d'existence pour une condition initiale à priori quelconque. On va donc approcher cette condition initiale par des conditions initiales type bouchons puis passer à la limite sur les solutions ainsi obtenues.

Lemme 2.1. Soit $n^0 \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $0 \leq n^0 \leq n^*$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbf{R})$, alors il existe une suite de blocs de conditions initiales $(n_k^0)_{k \geq 0}$ et $(u_k^0)_{k \geq 0}$ telle que $\int_{\mathbf{R}} n_k^0(x) dx \leq \int_{\mathbf{R}} n^0(x) dx$ et $\text{essinf } u^0 \leq u_k^0 \leq \text{esssup } u^0$ pour laquelle $n_k^0 \rightharpoonup n^0$ et $n_k^0 u_k^0 \rightharpoonup n^0 u^0$ au sens des distributions.

De plus, si on suppose que u^0 est à variations bornées sur tout compact, on a $TV_K(u_k^0) \leq TV_K(u^0)$.

Théorème 2.2. Soit $n_0 \in L^1(\mathbf{R})$ tel que $0 \leq n^0 \leq n^*$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ et à variations bornées sur tout compact. Alors, il existe (n, u, \bar{p}) avec les régularités $n \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbf{R}) \cap L_x^1(\mathbf{R}))$,

$u, \bar{p} \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbf{R}))$ et qui satisfait le système (2.5). La solution vérifie également pour tout $S \in C^1(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &\leq \frac{1}{t}, \\ \operatorname{ess\,inf}_y u^0(y) &\leq u(t, x) \leq \operatorname{ess\,sup}_y u^0(y), \\ 0 &\leq \bar{p}(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_y u^0(y), \\ \partial_t(nS(u) + n\bar{p}^S) + \partial_x(nuS(u) + nu\bar{p}^S) &= 0 \text{ dans }]0, \infty[\times \mathbf{R}, \end{aligned}$$

avec $\bar{p}^S \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$ et $\tilde{K} = [\operatorname{ess\,inf}_y u^0, \operatorname{ess\,sup}_y u^0]$ tel que

$$|\bar{p}^S| \leq \|S'\|_{L^\infty(\tilde{K})} |\bar{p}|,$$

Remarque. Nous avons ici un résultat sur l'existence d'une solution au système CPGD (2.5). Par contre il n'y a pas à priori l'unicité de celle-ci, mais la vérification de la condition d'entropie donne de bons espoirs pour obtenir cette unicité.

Dans la section suivante, tout le travail de l'article sera repris et réadapté au cas où n^* dépend de u .

3 Faisons varier n^* en fonction de u

3.1 Le nouveau modèle AR modifié ou AR2

Dans la section précédente, nous avons fixé une densité maximale n^* à ne pas dépasser. Mais, si on observe le comportement des conducteurs on se rend rapidement compte que la densité maximale de véhicules est plus grande là où la vitesse est plus faible. En effet, à vitesse très faible, les voitures sont presque collées les unes aux autres, tandis que pour des vitesses élevées, les voitures conservent des distances de sécurité non négligeables. C'est pourquoi il a fallu étudier le cas où n^* dépend de u .

On reprend donc le système initial du modèle de Aw-Rascle (2.1) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \\ (\partial_t + u\partial_x)(u + p(n, u)) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Et, cette fois-ci, p ne dépend pas seulement de n , il dépend également de n^* donc de u . On prend alors p de la forme :

$$p(n, u) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^*(u)} \right)^{-\gamma}, \text{ avec } n \leq n^*(u), u \rightarrow n^*(u) \text{ décroissante en } u.$$

Comme précédemment on peut le mettre sous forme conservative, selon le système (2.2), mais on obtient cette fois-ci les valeurs propres

$$\lambda_1(n, u) = u - \frac{n\partial_n p}{1 + \partial_u p} \leq u = \lambda_2(n, u).$$

On a de nouveau un système strictement hyperbolique, dont on peut calculer des vecteurs propres :

$$r_1(n, u) = \begin{pmatrix} 1 + \partial_u p \\ -\partial_n p \end{pmatrix} \text{ et } r_2(n, u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ainsi que des invariants de Riemann : w et u sont respectivement associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . On peut donc diagonaliser le système sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + \left(u - \frac{n\partial_n p}{1 + \partial_u p} \right) \partial_x u = 0 \\ \partial_t w + u\partial_x w = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

On cherche alors des propriétés sur les valeurs propres. On calcule les quantités $\nabla\lambda_i(n, u).r_i(n, u)$ pour $i = 1, 2$ et on en déduit que le champ r_2 est linéairement dégénéré, donc que les 2-ondes seront des discontinuités de contact, et, si on prend l'hypothèse $u \rightarrow n^*(u)$ concave, on trouve alors que le champ r_1 est vraiment non linéaire, donc que les 1-ondes seront soit des chocs, soit des ondes de détente. En ce qui concerne les stabilités des inconnues on a le même résultat que dans le cas où n^* est constante, avec de plus sur n la propriété : $n < n^*(u)$.

A ce point de notre étude, on peut faire la même constatation que dans l'article, à savoir que le ralentissement des véhicules n'a lieu que lorsque la densité est maximale. C'est pourquoi il faut étudier la limite quand ε tend vers 0 du système RMAR2 :

$$\begin{cases} \partial_t n^\varepsilon + \partial_x(n^\varepsilon u^\varepsilon) = 0 \\ (\partial_t + u^\varepsilon \partial_x)(u^\varepsilon + \varepsilon p(n^\varepsilon, u^\varepsilon)) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2 Le nouveau modèle contraint de la dynamique des gaz sans pression

Pour cela, on considère le couple $(n^\varepsilon, u^\varepsilon)$ solution du système (3.3) et on regarde ce qui se passe quand ε tend vers 0, ayant supposé $(n^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow (n, u)$. En supposant également $\bar{p} = \lim \varepsilon p(n^\varepsilon, u^\varepsilon) < \infty$, on obtient de nouveau un système contraint de la dynamique des gaz sans pression (CPGD2),

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \\ (\partial_t + u \partial_x)(u + \bar{p}) = 0 \\ 0 \leq n \leq n^*(u), \bar{p} \geq 0, (n^*(u) - n)\bar{p} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Notre but est maintenant de montrer l'existence de solution pour un tel système. Pour commencer il va falloir trouver une solution dans le cas où la condition initiale est simple : le problème de Riemann. Or, on sait que ce système est la limite du système RMAR2 (3.3), qui est strictement hyperbolique, et dont on sait résoudre le problème de Riemann. On va donc regarder la limite quand ε tend vers 0 des solutions du problème de Riemann pour le système (3.3).

Voyons tout d'abord les limites des valeurs propres. On avait :

$$\lambda_1^\varepsilon = u^\varepsilon - \frac{\varepsilon n^\varepsilon \partial_n p}{1 + \varepsilon \partial_u p} \leq \lambda_2^\varepsilon = u^\varepsilon.$$

On a immédiatement : $\lambda_2^\varepsilon \rightarrow u$, et $\lambda_1^\varepsilon \rightarrow u$ là où $n^\varepsilon \rightarrow n^*(u)$. Il reste donc à étudier le cas où $n^\varepsilon \rightarrow n^*(u)$ et \bar{p} fini et non nul. On a alors $n^*(u^\varepsilon) - n^\varepsilon \sim C\varepsilon^{1/\gamma}$, et finalement

$$\lambda_1^\varepsilon \rightarrow u + \frac{n^*(u)}{n^*(u)}.$$

Remarque. Dans le cas où n^* était indépendant de u on avait $\lambda_1^\varepsilon \rightarrow -\infty$, ce qui impliquait que la vitesse était constante dans les bouchons, et se traduisait dans la résolution du problème par le changement d'état instantané de toutes les voitures d'un même bouchon, comme si l'information se propageait instantanément. La partie suivante, qui est consacrée à la résolution du problème de Riemann, montrera comment se traduit cette limite finie sur les solutions.

3.3 Le problème de Riemann pour le système CPGD2

3.3.1 Le problème de Riemann pour le système RMAR2 (3.3)

On a ici le même type de système, les mêmes propriétés sur les valeurs propres que dans le modèle RMAR. On a donc également le même type d'onde simple. De plus, le calcul donne les mêmes courbes de i -onde :

- pour $i = 1$, $u_r + \varepsilon p(n_r) = u_l + \varepsilon p(n_l)$, avec un choc si $n_r > n_l$, une onde de détente sinon ;
- pour $i = 2$, $u_l = u_r$, avec une discontinuité de contact (DC).

La résolution du problème de Riemann dans le cas général donne un état intermédiaire (\tilde{n}, \tilde{u}) tel que $\tilde{u} + \varepsilon p(\tilde{n}, \tilde{u}) = u_l + \varepsilon p(n_l, u_l)$ et $\tilde{u} = u_r$. On a de nouveau trois cas distincts :

- $u_r < u_l$: $(n_l, u_l) \xrightarrow{1\text{-choc}} (\tilde{n}, u_r) \xrightarrow{2\text{-DC}} (n_r, u_r)$.
- $u_l < u_r < u_l + p_l$: $(n_l, u_l) \xrightarrow{1\text{-détente}} (\tilde{n}, u_r) \xrightarrow{2\text{-DC}} (n_r, u_r)$.
- $u_r > u_l + p_l$: $(n_l, u_l) \xrightarrow{1\text{-détente}} (0, u_l + \varepsilon p_l) \xrightarrow{Vide} (0, u_r) \xrightarrow{2\text{-DC}} (n_r, u_r)$.

3.3.2 Résolution du problème de Riemann pour le système CPGD2 (3.4)

De nouveau c'est une résolution longue et fastidieuse que l'on peut résumer par quelques schémas (figures 5 à 9).

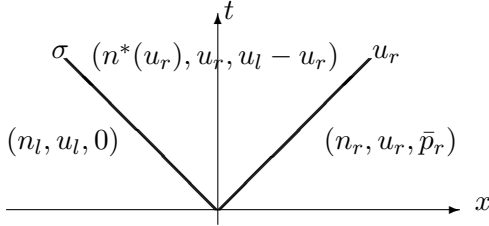


FIG. 5 - $n_l < n^*, u_l > u_r$
Les véhicules à l'arrière freinent brusquement et un bouchon se crée; un choc se propage à la vitesse $\sigma = \frac{n_l u_l - n_r^* u_r}{n_l - n_r^*}$.

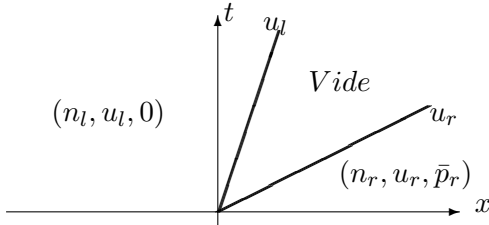


FIG. 6 - $n_l < n^*, u_l < u_r$
Les véhicules ne modifient pas leur comportement. Un vide se crée entre ceux de devant et ceux de derrière.

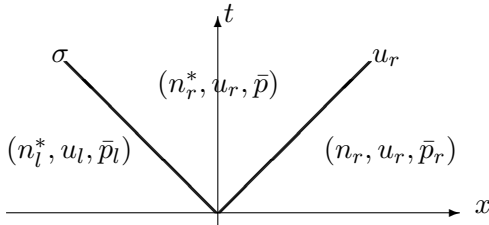


FIG. 7 - $n_l = n^*(u_l), u_l > u_r$
Les véhicules à l'avant du bouchon de derrière freinent brusquement et, de ce fait, leur densité augmente : le bouchon va moins vite et est plus dense.
 $\sigma = \frac{n_l^* u_l - n_r^* u_r}{n_l^* - n_r^*}, \quad \bar{p} = \bar{p}_l + u_l - u_r.$

La différence principale de ce modèle par rapport à celui avec n^* fixe est que, à un temps t fixé, la vitesse n'est pas constante dans un bouchon ; par conséquent sa densité n'est pas fixe non plus. Il peut donc y avoir des ondes de détente, ou de choc qui se développent à l'intérieur même du bouchon, ce qui compliquera la démonstration d'existence de solution pour le système CPGD2 (3.4) muni d'une condition initiale quelconque.

3.4 Une démonstration de l'existence d'une solution pour le système CPGD2 (3.4)

Pour démontrer qu'une solution existe, il faut déjà démontrer qu'un bouchon est solution du système CPGD2. Mais en réalité, il n'est pas nécessaire de prouver l'existence de tous les bouchons car l'existence de solution générale sera montrée par approximation par des "clusters" dont on peut choisir la forme. Il faut donc d'abord définir ce qu'est une fonction cluster et démontrer qu'elles existent, puis instaurer une dynamique entre les clusters, et enfin, par approximation de la condition initiale, montrer l'existence de solution.

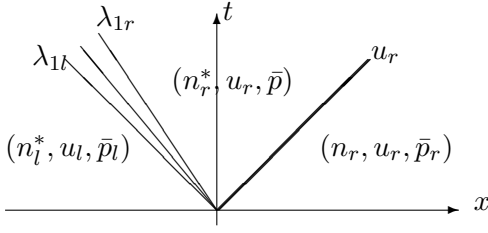


FIG. 8 – $n_l = n^*(u_l)$, $u_l < u_r < u_l + \bar{p}_l$
 Les véhicules du bouchon de derrière accélèrent progressivement mais restent dans l’embouteillage.
 $\lambda_{1l} = \lambda_1(n^*(u_l), u_l)$, $\bar{p} = \bar{p}_l + u_l - u_r$.

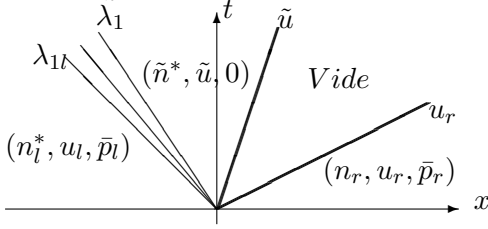


FIG. 9 – $n_l = n^*(u_l)$, $u_l + \bar{p}_l < u_r$
 Les véhicules accélèrent jusqu’à avoir atteint leur vitesse préférée.
 $\tilde{u} = u_l + \bar{p}_l$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1(\tilde{n}^*, \tilde{u})$

3.4.1 Démonstration d’existence d’un cluster

On voudrait donner une définition simple des clusters dont on puisse montrer qu’ils sont solutions du système CPGD2. On a vu que si la vitesse est croissante à l’intérieur d’un cluster, alors des ondes de détente vont apparaître. On va donc prendre comme définition pour les clusters :

Définition 3.1. *Un cluster au temps t est un intervalle $[X_1(t), X_2(t)]$ tel que*

- $n(t, x) = n^*(u(t, x))$ dans le cluster,
- $\partial_t n + \partial_x(q(n)) = 0$ dans le cluster, avec $q(n)$ le flux de véhicules en fonction de la densité n ,
- $n = 0$ à l’extérieur du cluster,
- $\frac{dX_i}{dt} = U_i(t)$, $i = 1, 2$ avec $U_i(t) = u(X_i(t), t)$, $u = \frac{q(n)}{n}$,
- $\frac{dU_2}{dt} = 0$,
- $\partial_x u \leq 0$.

Le couple (n, u) est alors appelé fonction cluster.

Pour démontrer l’existence d’un tel objet, on aimerait pouvoir utiliser la méthode de Godunov, mais le problème est que l’intervalle de définition n’est pas fixe en temps. Il va donc falloir passer en coordonnées lagrangiennes pour avoir un intervalle fixe en temps.

Transformation Euler-Lagrange Les coordonnées eulériennes sont les coordonnées (t, x) où l’objet est repéré par sa position x à l’instant t . En coordonnées lagrangiennes, un objet est repéré par le temps t et sa position au temps 0.

On se place dans un cluster $[X_1(t), X_2(t)]$, on remarque alors que la quantité

$$M = \int_{\mathbf{R}} n(t, x) dx = \int_{X_1(t)}^{X_2(t)} n(t, x) dx$$

est conservée dans le temps, ce qui autorise à poser :

$$m(t, x) = \int_{-\infty}^x n(t, y) dy = \int_{X_1(t)}^x n(t, y) dy \in [0, M]$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \tau(t, m) &= \frac{1}{n(t, X(t, m))} \\ v(t, m) &= u(t, X(t, m)) \\ V(\tau) &= u^*\left(\frac{1}{\tau}\right) \text{ et } v(t, m) = V(\tau(t, m)). \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient la définition lagrangienne du cluster : un cluster est l'intervalle $[0, M]$, tel que pour tout t

- $\partial_t \tau - \partial_m(V(\tau)) = 0$ sur $[0, M]$
- $v(t, M) = u(t, X_2(t)) = v_0(M)$ c'est-à-dire $\tau(t, M) = \tau_0(M)$ car V bijective
- $\partial_x v \leq 0$.

A partir de là, il faut montrer qu'un tel objet existe bien en coordonnées lagrangiennes. Pour cela, on utilise un schéma de Godunov.

Démonstration par Godunov Un schéma de Godunov permettra de démontrer l'existence de solution faible à l'équation :

$$\partial_t \tau - \partial_m(V(\tau)) = 0 \text{ sur } [0, M] \quad (3.5)$$

Il est donc nécessaire de définir ce qu'est une solution faible pour t dans $[0, \infty[$ pour une telle équation. On suppose pour cela qu'on a une solution régulière τ , on multiplie (3.5) par $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+ \times]0, M])$, l'ensemble des fonctions C^∞ à support dans $\mathbf{R}_+ \times]0, M]$, puis on intègre. Après des intégrations par parties, on obtient le problème faible suivant :

$$\int_0^M \tau \varphi \, dm \Big|_0 - \int_0^\infty \int_0^M \tau \partial_t \varphi \, dt \, dm + \int_0^\infty \int_0^M V(\tau) \partial_m \varphi \, dt \, dm - v_0 \int_0^\infty \varphi \, dt \Big|_M = 0 \quad (3.6)$$

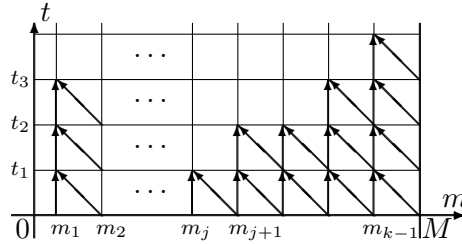
On peut maintenant définir le schéma de Godunov qui permet de démontrer l'existence d'une solution faible de (3.6). Soit $\Delta m > 0$, et tel que $M = (k - 1/2)\Delta m$ pour un certain k , on pose alors $m_i = (i - 1/2)\Delta m$, $i \leq k$ et $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathbf{N}$ où $\lambda = \Delta t / \Delta m$ vérifie $\lambda \leq \frac{1}{2\|V'\|_\infty}$. On veut définir le schéma correspondant à la condition initiale τ_0 . Pour cela, on pose

$$\forall i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, \tau_i^0 = \int_{m_{i-\frac{1}{2}}}^{m_{i+\frac{1}{2}}} \tau(0, y) \, dy,$$

et $\forall n \in \mathbf{N}_+, \tau_N^n = \tau_0(M)$. Le schéma de Godunov est défini ici par la relation

$$\forall i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, \forall n \in \mathbf{N}, \tau_i^{n+1} = \tau_i^n - \lambda (V(\tau_{i+1}^n) - V(\tau_i^n)). \quad (3.7)$$

Cette définition est complète compte tenu du fait que l'information se propage dans le sens des m décroissants et que τ est totalement connu le long du bord droit.



Théorème 3.2. *Le schéma (3.7) converge vers une solution τ de (3.6).*

La démonstration est analogue à celle donnée par [4]. Une fois démontrée l'existence d'une solution faible, on peut définir $\bar{p}(t, m) = V(t, m) - V_0(m)$, qui vérifie bien l'équation obtenue en coordonnées lagrangiennes : $\partial_t(u + \bar{p}) = 0$, et la condition $\bar{p} \geq 0$. On peut également définir \bar{p}^S , pour $S \in C^1$ par $\bar{p}^S = S(V(t, m)) - S(V_0(m))$, qui vérifie bien la relation :

$$\partial_t(S(V) + \bar{p}^S) = 0.$$

Par ailleurs, on montre que la solution obtenue vérifie la condition d'entropie

$$\partial_t(\Sigma(\tau)) + \partial_x(F(\tau)) \leq 0,$$

pour tout Σ strictement convexe et F le flux associé. Là encore, la démonstration est semblable à celle de [4].

Retour en coordonnées eulériennes Le retour aux coordonnées eulériennes donne l'existence des clusters. Mais il faut encore montrer que l'interface entre le vide ($n = 0$) et le cluster reste solution, ce qui est immédiat à droite du cluster par la relation de Rankine-Hugoniot. Mais sur le coté gauche du cluster la démonstration est loin d'être évidente. Elle est faite par Temple dans [7]. Par le retour en coordonnées eulériennes, la condition d'entropie à l'intérieur du cluster devient :

$$\partial_t(n\eta(n)) + \partial_x(nu^*(n)\eta(n) + G(n)) \leq 0$$

pour tout couple (η, G) tel qu'il existe Σ convexe tel que $\eta(n) = \Sigma(1/n)$, $G(n) = F(1/n)$ et $F' = \Sigma'V'$. De même, pour $S \in C^1$, on obtient l'existence de \bar{p}^S tel que

$$\partial_t(n(S(u) + \bar{p}^S)) + \partial_x(nu(S(u) + \bar{p}^S)) = 0.$$

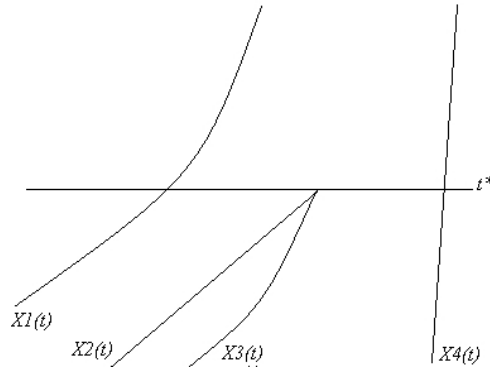
Par la forme lagrangienne de \bar{p}^S , on obtient également l'inégalité :

$$TV_K(\bar{p}^S) \leq 2n^* \|S'\|_{L^\infty(\tilde{K})} TV_K(u),$$

où $\tilde{K} = [\text{essinf } u^0, \text{esssup } u^0]$.

3.4.2 Dynamique des clusters

On suppose maintenant qu'on a une solution jusqu'au temps t^* donnée par des fonctions clusters, réparties sur \mathbf{R} . D'après le paragraphe précédent, on sait que de telles solutions existent. Ces solutions clusters peuvent cependant interagir à partir de l'instant t^* : le cluster de gauche peut rattraper celui de droite et il faudrait savoir quelle dynamique donner aux clusters pour qu'on garde des solutions au-delà. Supposons qu'au temps t^* on ait une rencontre de deux clusters $[X_1(t), X_2(t)]$ et $[X_3(t), X_4(t)]$. On a alors une solution de (3.4) sur $[0, t^*[$ et une solution sur $]t^*, +\infty[$ avec comme condition initiale la condition en $t = t^*$ qui correspond à la réunion des deux clusters.



Il faut ensuite vérifier qu'une telle dynamique donne bien une solution de (3.4). Mais ce n'est pas un point qui pose tellement de problème. Il faut également s'assurer que u au temps t^* vérifie bien toutes les propriétés exigées dans la définition des clusters, et en particulier que u est décroissante. Mais ceci est simplement dû au fait que u est décroissante dans chaque intervalle $[X_i(t), X_{i+1}(t)]$, $i = 1, 3$ et qu'on a $X'_2(t) \geq X'_3(t)$.

On montre également que cette dynamique permet de conserver l'existence de \bar{p}^S tel qu'on l'a défini.

3.4.3 Démonstration de l'existence d'une solution au système CPGD2 (3.4)

Nous avons donc montrer l'existence d'un certain type de solutions : les 'fonctions cluster'. Elles sont telles que

$$\forall (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, n(t, x) = 0 \text{ ou } n(t, x) = n^*(u(t, x)).$$

L'idée est donc maintenant d'approcher la condition initiale par une fonction cluster avec l'espoir que la solution associée sera une approximation d'une solution de (3.4). Il faut donc dans un premier temps montrer que l'on peut faire cette approximation.

Lemme 3.3. *Soit $n^0 \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $0 \leq n^0 \leq n^*(0)$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ à variation totale bornée sur tout compact telle que $0 \leq u^0 \leq u^*(n^0)$, alors il existe une suite de "fonctions cluster" $(n_k^0)_{k \geq 0}$ et $(n_k^0 u_k^0)_{k \geq 0}$ telle que $\int_{\mathbf{R}} n_k^0(x) dx \leq \int_{\mathbf{R}} n^0(x) dx$ et $\text{essinf } u^0 \leq u_k^0 \leq \text{esssup } u^0$ pour laquelle $n_k^0 \rightharpoonup n^0$ et $n_k^0 u_k^0 \rightharpoonup n^0 u^0$ au sens des distributions.*

La démonstration est semblable à celle faite dans [1] et permet de se restreindre de plus à des couples (n, u) tels que les clusters soient tous de vitesse constante, mais différente, en $t = 0$.

Il faut ensuite montrer que si on considère la suite $(n_k, u_k, \bar{p}_k)_k$ de solutions associées aux conditions initiales (n_k^0, u_k^0) , on a la convergence à extraction près vers une solution de (3.4), c'est-à-dire :

Proposition 3.4. *On suppose que les solutions (n_k, u_k, \bar{p}_k) ont les régularités*

$$n \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbf{R}) \cap L_x^1(\mathbf{R})), \quad (3.8)$$

$$u, \bar{p} \in L_t^\infty(0, \infty; L_x^\infty(\mathbf{R})); \quad (3.9)$$

et que les conditions initiales n_k^0, u_k^0 satisfont :

$$\begin{aligned} 0 \leq n_k^0 \leq n^*, \quad (n_k^0)_k \text{ est bornée dans } L^1(\mathbf{R}), \\ (u_k^0)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

On suppose également vraies les relations

$$\partial_x u(t, x) \leq \frac{1}{t}, \quad (3.10)$$

$$\text{essinf}_y u^0(y) \leq \text{esssup}_y u^0(y), \quad (3.11)$$

$$\forall t < T, TV_K(\bar{p}(t, \cdot)) \leq TV_K(u(t, \cdot)) + TV_{K_T}(u^0), \quad (3.12)$$

$$0 \leq \bar{p} \leq \text{esssup}_y u^0(y) \quad (3.13)$$

avec $K_T = [a - T \text{esssup } u, b - T \text{essinf } u]$ si $K = [a, b]$ (il est facile de voir qu'elles sont vérifiées dans les fonctions clusters qu'on a défini). Alors, quitte à extraire une sous-suite, quand $k \rightarrow \infty$, $(n_k, u_k, \bar{p}_k) \rightharpoonup (n, u, \bar{p})$ dans le sens suivant :

$$n_k \rightharpoonup n, \quad u_k \rightharpoonup u, \quad \bar{p}_k \rightharpoonup \bar{p} \quad \text{dans } L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R}) \text{ au sens faible}^*,$$

avec (n, u, \bar{p}) ayant les régularités (3.8)-(3.9) est solution de (3.4) avec la condition initiale (n^0, u^0) définie par

$$n_k^0 \rightharpoonup n^0, \quad n_k^0 u_k^0 \rightharpoonup n^0 u^0 \quad \text{dans } L^\infty(\mathbf{R}) \text{ au sens faible}^*.$$

La solution ainsi obtenue satisfait aussi les relations (3.10), (3.11) et (3.13).

Pour la démonstration de ce résultat, il faut de nouveau se référer à [2]. La principale difficulté réside dans le passage à la limite des produits, mais elle est résolue en utilisant un résultat de compacité par compensation, c'est-à-dire qu'on utilise une compacité relative par rapport à t sur \bar{p}_k et une compacité en x sur n_k afin d'avoir la convergence $n_k \bar{p}_k \rightharpoonup n \bar{p}$. Le résultat de compacité par compensation est détaillé et démontré dans [1] par Berthelin.

Une fois obtenue cette proposition, on peut démontrer le théorème final :

Théorème 3.5. *Soit $n_0 \in L^1(\mathbf{R})$ tel que $0 \leq n^0 \leq n^*$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ et à variations bornées sur tout compact. Alors il existe (n, u, \bar{p}) avec les régularités (3.8)-(3.9) et qui satisfait le système (3.4). La solution vérifie également (3.10), (3.11), (3.13) et pour tout $S \in C^1(\mathbf{R})$*

$$\partial_t(nS(u) + n\bar{p}^S) + \partial_x(nuS(u) + n\bar{p}^S) = 0 \text{ dans }]0, \infty[\times \mathbf{R},$$

avec $\bar{p}^S \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$ et $\tilde{K} = [\text{essinf } u^0, \text{esssup } u^0]$ tel que :

$$|\bar{p}^S| \leq \|S'\|_{L^\infty(\tilde{K})} |\bar{p}|.$$

Démonstration. Par le lemme 3.3, on obtient une suite de conditions initiales (n_k^0, u_k^0) convergeant vers (n^0, u^0) . On lui associe la suite de solutions (n_k, u_k, \bar{p}_k) . La proposition 3.4 donne la convergence de cette suite vers une solution (n, u, \bar{p}) de (3.4). Il reste donc à vérifier la condition d'entropie. La démonstration est donnée dans [1] sauf en ce qui concerne la principale difficulté qui est de montrer que

$$\left(\int_{\mathbf{R}} n_k S(u_k) \varphi(x) dx \right)_{k \in \mathbf{N}} \text{ est uniformément bornée, en } k, \text{ dans } BV_t,$$

pour pouvoir utiliser le résultat de compacité par compensation. Pour cela, on utilise la propriété que u est décroissante dans un cluster et que les approximations des conditions initiales sont constantes par morceaux. A partir de là, on sait qu'on a que des chocs dans les clusters (par la résolution des problèmes de Riemann) et que les points de discontinuité le long des caractéristiques sont isolés. On peut donc calculer explicitement l'intégrale en faisant les calculs de $n_k S(u_k)$ le long des caractéristiques. Ainsi on obtient la borne dans BV_t . \square

Conclusion

Pendant ce stage, on a donc démontré l'existence de solution faible au modèle de trafic routier considéré, mais par contre il n'y pas ici d'unicité. Il faudrait, dans un premier temps obtenir une généralisation sur la globalité d'une solution —i.e. sur tout $[0, \infty[\times \mathbf{R}$.— de la condition d'entropie obtenue à l'intérieur même des clusters. Ceci afin d'avoir une condition d'entropie qui assure déjà l'unicité des clusters. Ensuite, la démonstration se complique et vu que l'unicité n'est pas encore démontrée dans le cas où n^* est une constante, on ne peut s'attendre à un résultat immédiat.

Ceci étant, ce modèle a l'avantage d'être assez simple, il ne contient qu'une fonction paramètre $n^*(u)$. On pourrait par ailleurs y greffer d'autres réalités de la circulation comme les bifurcations et jonctions de routes qui jouent un assez grand rôle dans l'évolution du trafic : création de bouchon ou résorption. Il serait également possible de faire des simulations numériques à partir de ce modèle.

Remerciements A M.Degond, mon maître de stage, pour m'avoir aiguillée dans les recherches, M. Roquejoffre, le directeur du laboratoire, ainsi qu'à tout le laboratoire MIP (Mathématiques pour l'Industrie et la Physique) de Toulouse qui m'a accueillie et merci également à ceux qui m'ont présenté leurs travaux de recherche.

Références

- [1] F. BERTHELIN, *Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint*, Math. Models & Methods in the Applied Sciences, 12 (2002), pp. 249-272.
- [2] F. BERTHELIN, P. DEGOND, M. DELITALA, M. RASCLE, *A model for the formation and evolution of traffic jams*, prépublication.
- [3] P. DEGOND, *Equations et systèmes hyperboliques non linéaires*, cours à l'ENS de Cachan.
- [4] E. GOLDEWSKI, P.-A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, SMAI, Mathématiques & applications.
- [5] A.Y. LE ROUX, M. SCHATZMAN, *Analyse et approximation de problèmes hyperboliques non linéaires*, cours à l'école polytechnique, 1981.
- [6] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer, 1994.
- [7] B. TEMPLE, *Solutions in the large for the nonlinear hyperbolic conservation laws of gas dynamics*, Differential equations, 41 (1981), pp. 96-161.