Paulo.

G ⟳ M

Rappel

$$\Omega_G(M) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^G$$

$$d_{\mathfrak{g}} : \Omega_G(M) \to \Omega_G(M)$$

$$d_{\mathfrak{g}}(\omega)(X) = d\omega(X) - \iota_{V_X}(\omega(X))$$

$X \in \mathfrak{g}$

$$H_G(M) = H(\Omega_G(M), d_{\mathfrak{g}})$$

<u>Rem</u> : dans le cas non-compact on considère la cohomologie à support compact.

Soit X, Y deux variétés orientées

Soit $\pi : Y \to X$ une fibration équivariante préservant l'orientation

<u>prop</u> $\exists\ \pi_* : H_G^{p+k}(Y) \to H_G^k(X)$ où $p = \dim Y - \dim X$

complètement caractérisée par

la relation :

$$\int_Y \pi^*\beta \wedge \mu = \int_X \beta \wedge \pi_*\mu$$

<u>démo</u>

localement en coordonnées

$(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p)$ sur Y où $(x_1, \dots, x_n)$ coord. locales sur X.

et $\pi(x,t) = x$ on vérifie que si $\mu = f_I(x,t)\, dx^I \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$

alors $\pi_* \mu = \left(\int f_I(x,t)\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n \right) dx^I$

$\hookrightarrow$ integration le long des fibres.

unicité de π_* est due à la dualité de Poincaré

avec une partition de l'unité on construit

$\pi_* : \Omega_0^{n+p}(Y) \longrightarrow \Omega_0^{n}(X)$

on vérifie que $d\pi_* = d\pi_*$

soit $\mu \in \Omega^{\ell-1}(Y)$ et $\beta \in \Omega^{m-\ell}(X)$ dim $Y = m$, dim $X = n$

$$\int_X \beta \wedge \pi_* d\mu = \int_Y \pi^*\beta \wedge d\mu \underset{\substack{\text{stokes} \\ + \ \pi^* d = d\pi^*}}{=} (-1)^{n-\ell-1} \int_Y \pi^* d\beta \wedge \mu$$

$$= (-1)^{m-\ell-1} \int d\beta \wedge \pi_* \mu \underset{\text{stokes}}{=} \int \beta \wedge d\pi_* \mu$$

(maintenant le cas équivariant)

Si
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$
ϕ, ψ préservent l'orientation

alors $\pi_* \circ \phi^* = \psi^* \circ \pi_*$

Soient V et W des champs de vecteurs sur Y et sur X respectivement alors $d\pi_y(V(y)) = W(\pi(y))$

alors $\pi_* \circ \mathcal{L}_V = \mathcal{L}_W \pi_*$ et $\pi_* \circ \iota_V = \iota_W \pi_*$

en effet,

$$\int_X \beta \wedge \pi_* \iota_v \mu = \int_Y \pi^*\beta \wedge \iota_v \mu = (-1)^{m-\ell} \int_Y \iota_v(\pi^*\beta) \wedge \mu$$

$$= (-1)^{n-\ell} \int \pi^* \iota_w \beta \wedge \mu = (-1)^{n-\ell} \int_Y \iota_w \beta \wedge \pi_* \mu$$

$$= \int_Y \beta \wedge \iota_w \pi_* \mu$$

□

<u>théo</u> $\exists\, \pi_* : H^\cdot_G(Y) \longrightarrow H^\cdot_G(X)$

tq. $\pi_*(\pi^*\beta \wedge \mu) = \beta \wedge \pi_* \mu$

$$\int \alpha \wedge \pi_*(\pi^*\beta \wedge \mu) = \int \pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta \wedge \mu$$

$$= \int \pi^*(\alpha \wedge \beta) \wedge \mu = \int \alpha \wedge \beta \wedge \pi_* \mu$$

<u>Ex</u> :

$$\pi_* : H^\cdot_G(M) \longrightarrow H^\cdot_G(\cdot) = S(\mathfrak{g}^*)^G$$

$$\omega \longmapsto \left(X \longmapsto \int_M \omega(X)\right)$$

compact

<u>theo</u> $G \curvearrowright M$ Soit $\alpha \in \Omega_G(M)$ $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$

et soit $X \in \mathfrak{g}$ $M_0 = \{ p \in M \mid V_X(p) = 0 \}$

$=$ zero de du X

$N = N(M, M_0)$ le fibré normal

$\forall$ ~~$\forall$~~ Y "proche" ~~qui~~ du X et dans le centralisateur de X
$[X,Y]=0$.

alors

$$\int_M \alpha(Y) = \int_{M_0} (2\pi)^{\mathrm{rank}\, N/2} \frac{\alpha(Y)}{\mathrm{Eul}_G(N)(Y)}$$

On va montrer

<u>theo A</u> (Atiyah-Bott, Berline-Vergne)

$$N \underset{i}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} M_0$$

$$\int_N \beta = \int_{M_0} \frac{i^*\beta}{\mathrm{Eul}(N)}$$

<u>prop</u> "$\int_M \alpha = \int_N \pi^*\alpha$"

<u>Thm</u> Isom. de Thom

Soit $V \xrightarrow{\pi} B$ un G-fibré vect. réel orienté.

de rang k sur B où B : var. compacte

alors $\pi_* : H_G^{\bullet+k}(V) \to H_G^{\bullet}(B)$ est un isomorphisme

integ. le long des fibres

et il existe $Th_G(V) \in \Omega_G^k(V)$

↳ une forme de Thom

tq. $\pi_*^{-1}(\alpha) = \alpha \wedge Th_G(V)$

D'abord on le fait pour B un point. et $G = SO(k)$

$\mathbb{R}^k \to \{*\}$

$$Th_{SO(k)}(\mathbb{R}^k)(X) = \frac{e^{-\|x\|^2}}{\pi^{k/2}} \sum_{I \subset \{1,\dots,k\}} \varepsilon_I \det{}^{1/2}\left(\frac{X_I}{2}\right) dx^{I^c}$$

où $|I|$ pair $I^c = \{1,\dots,k\} \setminus I$

ε_I : signe tq. $dx^I \cdot dx^{I^c} = \varepsilon_I dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$

X_I = la matrice X où on efface les colonnes et les lignes qui ne sont pas dans I.

Mathai-Quillen : $Th_{SO(k)}(\mathbb{R}^k)$ est une forme de Thom.

En général pour $V \xrightarrow{\pi} B$ comme tout à l'heure

on considère $P_V \to B$ le ~~SO~~ $SO(k)$ fibré principal

$G \curvearrowright P_V$ et $G \curvearrowright B$. $\quad G \subset SO(k)$ $\left(\begin{array}{c} G \text{ preserve} \\ \text{la mét.} \\ \text{Rien} \\ \text{changé.} \end{array} \right)$

On considère ensuite

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{SO(k)}(\mathbb{R}^k) \arrow[r] \arrow[dr] & \dot\Omega_{G\times SO(k)}(P_V \times \mathbb{R}^k) \arrow[r, "\text{Cartan}", "\text{map}"'] & \dot\Omega_G(P_V \times_{SO(k)} \mathbb{R}^k) \arrow[d, equal] \\
 & \dot\Omega_{G\times SO(k)}(\mathbb{R}^k) \arrow[u] & \dot\Omega_G(V)
\end{tikzcd}$$

Paulo (2ième exposé)

<u>Rappel</u> $X \subset Z$ sous-variété, N fibré normal

et $X \subset U$ voisinage

on identifie U a un voisinage de la section nulle dans N

pour $\tau \in \Omega_0^k(U)$ si $\pi_* \tau = 1$

↳ integration le long des fibres.

$k = \text{rang } N$

alors $\displaystyle\int_Z \alpha \wedge \tau = \int_U \alpha \wedge \tau = \int_U \pi^* i^* \alpha \wedge \tau$

$\displaystyle = \int_X i^* \alpha \wedge \pi_* \tau = \int_X i^* \alpha$

En général $V \xrightarrow{\pi} X$ G-fibré vectoriel de rang k on a $\pi_* : H_G^{\bullet + k}(V) \to H_G^{\bullet}(X)$, l'isomorphisme de Thom

Comme $\pi_*(\alpha \wedge \pi^* \beta) = (\pi_* \alpha) \wedge \beta$ on a, si $\pi_* \tau = 1$,

$\boxed{\pi_*^{-1}(\alpha) = \alpha \wedge \tau}$

<u>Idée</u> On construit $\tau = [Th_{SO(k)}(\mathbb{R}^k)] \in H^k_{SO(k)}(\mathbb{R}^k)$

Pour ensuite construire $\tau_V \in H^k_G(V)$

on prend $V = P \times \mathbb{R}^k / SO(k)$

où $P \to X$ est le $SO(k)$-fibré principal associé qui a une action G-compatible (ie on prend une métrique G-invariante)

On a $p_2 : P \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ proj. sur le 2ième facteur

~~et~~ donc $p_2^* : \Omega_{SO(k)\times G}(\mathbb{R}^k) \to \Omega_{SO(k)\times G}(P \times \mathbb{R}^k)$

l' "application de Cartan" donne

$$\Omega_{SO(k)\times G}(P \times \mathbb{R}^k) \xrightarrow{k_V} \Omega_G(P \times \mathbb{R}^k / SO(k)) \cong \Omega_G(V)$$

et

$$\Omega_{SO(k)\times G}(P) \xrightarrow[\cong]{k_X} \Omega_G(X)$$

~~classe~~ forme de Thom est

$$Th_G(V) = \kappa_V\, p_2^*\big(Th_{SO(k)}(\mathbb{R}^k)\big)$$

Thm $X \hookrightarrow Z$ fibré Normal

et $\tau(X) = Thom_G(N)$ alors $i^*\tau(X) = euler_G(N)$

où $i : X \longrightarrow N$ section nulle.

Idée

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & P \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "i"] & N \end{tikzcd}$$

$\leadsto$

$$\begin{tikzcd} H_{SO(k)\times G}(\mathbb{R}^k) \arrow[r, "p_2^*"] \arrow[d, "i_0^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^\cdot_{SO(k)\times G}(P \times \mathbb{R}^k) \arrow[r, "\kappa_N", "\cong"'] \arrow[d, "i^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^*_G(N) \arrow[d, "i^*"] \\ H^\cdot_{SO(k)\times G}(\cdot) \arrow[r, "p_0^*"'] & H^\cdot_{SO(k)\times G(P)}(P) \arrow[r, "\kappa_X", "\cong"'] & H^*_G(X) \end{tikzcd}$$

$i^*\tau(X) = i^*(\kappa_N(p_2^*$

$G \curvearrowright M$ $\quad X \subset M^G$ composante connexe de $\mathrm{Fix}_M G$

$U \to X$ un voisinage tubulaire G-invariant

et $\tau \in \Omega_G(U)$ une forme de Thom.

Alors pour $\mu \in \mathcal{D}'_G(U)$ à supp. compact.

$$\int_U \mu \wedge \tau = \int_U \pi^* i^* \mu \wedge \tau = \int_X i^* \mu$$

Si on inverse les rôles de τ et de μ.

on a aussi $\displaystyle \int_X i^* \mu = \int_U \mu \wedge \tau = \int_U \mu \wedge \pi^* i^* \tau$

$$= \int_U \mu \wedge \pi^* e(N).$$

Si codim X impair alors $e(N)=0$
ça ne se peut pas!

Comme $G \curvearrowright X$ trivialement $H_G(X) = S(\mathfrak{g}^*) \otimes H(X)$

Alors $e(N) = f_m + f_{m-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$.
où $f_i \in S^i(\mathfrak{g}^*)^G$ et $\alpha_i \in \Omega(X)$

Si $f_n \neq 0$ (3)

$$e(N) = f_n \left(1 - \frac{\alpha}{f_n}\right) \quad \text{où} \quad \alpha = -(f_{n-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

Formellement, $$\frac{1}{e(N)} = \frac{1}{f_n}\left(1 + \frac{\alpha}{f_n} + \frac{\alpha^2}{f_n^2} + \dots + \frac{\alpha^{q-1}}{f_n^{q-1}}\right)$$

En multipliant, f_n^q le côté droit on trouve.

$$\beta(N) = f_n^{q-1} + f_n^{q-2}\alpha + \dots + \alpha^{q-1} \in \Omega_G(X)$$

est d_g fermé (calcul...)

car $\alpha \in d_g$-fermée

$\Rightarrow$ $\beta(N)$ est un inverse de la classe d'Euler.

$$e(N) \times \beta(N) = f_n^q$$

$$\Rightarrow \int_X i^*\mu = \int_U \mu \wedge \pi^* e(N). \quad (*)$$

$$\Rightarrow \int_X \beta(N)\, i^*\mu = f_n^q \int_U \mu.$$

$$\Rightarrow \int_X \frac{i^*\mu}{e(N)} = \int_U \mu.$$

$$\int_M \alpha(Y) = \int_M e^{t d_g \Theta(Y)} \alpha(Y) \quad \forall t$$

$$\Theta(Z) = g(X_M, Z)$$

↳ mf. Rien. invariante.

⋮