ISFA

Processus stochastiques - Master Actuariat | Semestre automne 2017-2018

Vincent Lerouvillois | lerouvillois@math.univ-lyon1.fr

Septième séance

FORMULE D'ITÔ ET APPLICATIONS AUX EDS

---

1 Retour sur la feuille de TD n^{o}6

__Exercice 1.__ **[Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : modèle de Vasicek (1977)]** Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$) :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. Expliquez heuristiquement (en ne vous focalisant que sur l'équation stochastique) pourquoi ce processus a une "force de rappel vers b".
2. En appliquant le lemme d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
3. On suppose que dans un premier temps que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}_+$ Pourquoi $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il un processus Gaussien ? Préciser sa fonction espérance et sa fonction de covariance. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?
4. ♠ On suppose que X_0 est indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et $X_0 \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2/(2a))$. Pourquoi $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il un processus Gaussien ? Préciser sa fonction espérance et sa fonction de covariance. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stationnaire.

2 Formule d'Itô et équations aux dérivés stochastiques

__Exercice 2.__ **[Une EDS sur** $[0, 1[$ **]** On considère l'équation différentielle stochastique suivante sur l'intervalle de temps $[0, 1[$:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_s \tag{1}$$

1. Expliquer intuitivement pourquoi une solution X_t a une force de rappel vers 0 d'intensité tendant vers l'infini. Quelle est le comportement attendu de la solution lorsque t tend vers 1 ?

2. On pose $Y_t := \frac{X_t}{1-t}$. En appliquant la formule d'Itô, trouver une EDS satisfaite par Y_t. En déduire que l'unique solution de (1) est donnée par :

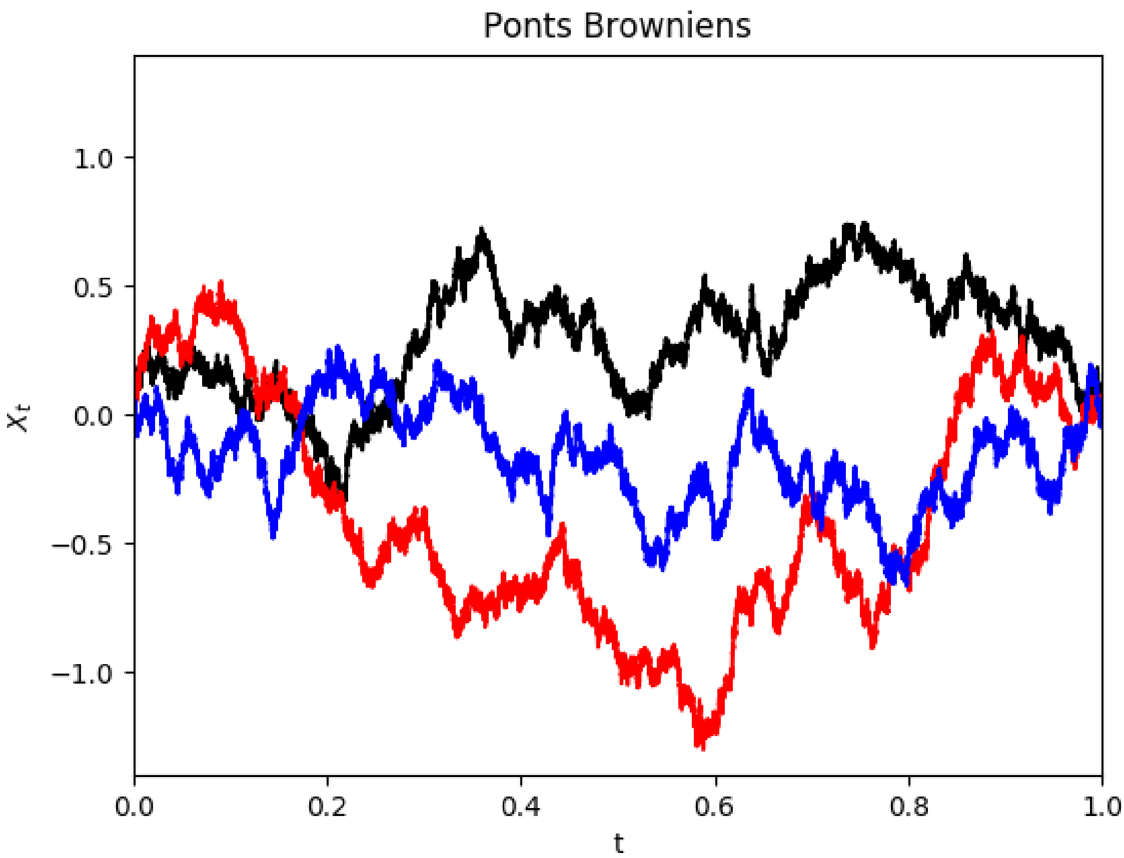
$$X_t = (1-t)X_0 + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dB_t$$

3. On suppose à partir de maintenant que $X_0 = 0$. Expliquer pourquoi (X_t) est un processus Gaussien centré. Montrer que sa fonction de covariance est donnée par :

$$Cov(X_s, X_t) = s(1-t),\ \forall 0 \leq s \leq t < 1$$

4. Montrer que $X_t \xrightarrow[t\to 1]{L^2} 0$.

Remarque : On appelle ce processus Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 en $t = 1$.



Exercice 3. **[Martingale Exponentielle]** Soit X_t est une semi-martingale continue issue de 0. On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dZ_t = Z_t dX_t \\ Z_0 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

1. En applicant la formule d'Itô à $Y_t = \ln(Z_t)$, calculer l'unique solution de (2) noté $\mathcal{E}_t(X)$, appelée exponentielle de Doléaus-Dade de X.
2. Si θ est un bon processus local, calculer $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ (où $(\theta * B)_t = \int_0^t \theta_s dB_s$). Pourquoi est-ce une martingale locale ? Qu'obtient-on pour $\theta = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$? Appliquer la condition de Navikov pour retrouver que $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ est une vraie martingale. Faire l'analogie avec la solution de l'équation de Black-Scholes.
3. Soit Y est une autre une semi-martingale continue issue de 0. En utilisant la formule d'Itô d'intégration par partie, écrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par $\mathcal{E}_t(X)\mathcal{E}_t(Y)$ et en déduire que :
$$\mathcal{E}_t(X)\mathcal{E}_t(Y) = \mathcal{E}_t(X + Y + \langle X, Y\rangle),$$
4. En déduire que $\mathcal{E}_t(X)^{-1} = \mathcal{E}_t(-X + \langle X\rangle)$.

Remarque : La martingale exponentielle de Doléaus-Dade $\mathcal{E}_t(X)$ intervient dans le changement de probabilité du théorème de Girsanov que nous verrons en TD la semaine prochaine.

Exercice 4. **[Mouvement Brownian en dimension 2]** Soit $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ un mouvement brownien 2-dimensionnel (où B_t^1 et B_t^2 sont deux mouvements browniens indépendants). Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ représente le déplacement d'une particule de façon aléatoire sur un plan (comme un grain de pollen sur l'eau). La distance au carré de cette particule à l'origine est donnée à l'instant t par $|B_t|^2 = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2$.

1. Utilisez la formule d'Itô pour montrer que $|B_t|^2 = M_t + 2t$ où M_t est une martingale local que l'on précisera (c'est la décomposition de $|B_t|^2$ en semi-martingale).
2. Calculer $\langle M\rangle_t$ et montrer que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$. En déduire que M_t est une (vraie) martingale dans L^2.
3. Posons $\beta_t = \int_0^t \frac{B_s^1}{|B_s|} dB_s^1 + \int_0^t \frac{B_s^2}{|B_s|} dB_s^2$. Monter que $\langle \beta\rangle_t = t$ et en déduire que β_t est un mouvement brownien (on admettra le théorème de caractérisation du mouvement Brownien de Levy : *toute martingale locale de variation quadratique t est un mouvement brownien*).
4. Montrer que $X_t = |B_t|^2$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :
$$dX_t = 2\sqrt{X_t} d\beta_t + 2dt.$$