ISFA

Processus stochastiques - Master Actuariat — Semestre automne 2017-2018

Vincent Lerouvillois — lerouvillois@math.univ-lyon1.fr

Huitième séance

THÉORÈME DE GIRSANOV

Exercice 1. **[Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov]** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités filtré. Soit B un mouvement Brownien standard. On pose

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

pour $t < T$ et θ une fonction déterministe dans $L^2([0,t])$ pour tout $t \geq 0$ $(= L^2_{loc})$.

1. Montrer que L est une martingale.
2. Justifier comment L peut définir un changement de probabilité.
3. Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t L_T]$ en fonction de t et de θ.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[B_t \exp(B_t)]$.

Exercice 2. **[Probabilité neutre au risque]** On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$. On fait l'hypothèse que le taux d'actif risqué évolue selon la formule de Black-Scholes. Autrement dit :

$$dS_t^0 = r\, S_t^0\, dt\,,$$

et :

$$dS_t = S_t\, (\mu\, dt + \sigma\, dW_t)\;,$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. On appelle actif risqué **actualisé** le processus

$$\left(\widetilde{S}_t\right)_{0\leq t\leq T} := \left(\frac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\leq t\leq T}.$$

Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez S_t^0.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\Big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\Big)$.
3. Donnez l'équation stochastique satisfaite par $\widetilde{S}_t$.

4. On note $\mathbb{P}$ la probabilité sous-jacente (sous-laquelle $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien). Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par

$$d\mathbb{Q} = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right) d\mathbb{P}\,.$$

Que pouvez-vous dire de $(W_t := B_t - \frac{r-\mu}{\sigma}\,t)_{0\leq t\leq T}$ sous $\mathbb{Q}$?

5. Montrez que $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ et écrire $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ comme processus d'Itô sous $\mathbb{Q}$ (à l'aide de W_t). On appelle $\mathbb{Q}$ la **probabilité neutre au risque**.

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$F(t,x) = e^{\sigma^2(T-t)}x^2 - 2ax + a^2\,.$$

   (a) Montrez que $(M_t := F(t,\widetilde{S}_t))_{0\leq t\leq T}$ est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$. Est-ce une martingale ?

   (b) Calculez $E_{\mathbb{Q}}\left[(\widetilde{S}_T - a)^2\right]$.