math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Correction exercice 2 : Supposons que l'on choisisse de lancer n dés. On note $X_1, ..., X_n$ les résultats des dés (indépendants et uniforme sur $\{1, ..., 6\}$) ainsi que la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On note aussi $Y = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \neq 1}$. D'après l'énoncé, le score vaut $G_n = S_n Y$. Commençons par calculer $\mathbb{E}\left[G_n \middle| Y = 1\right]$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[S_n Y \middle| Y = 1\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}[S_n Y]}{\mathbb{P}(Y = 1)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 \neq 1, ..., X_n \neq 1)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i \prod_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{X_j \neq 1}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 \neq 1)^n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i \mathbf{1}_{X_i \neq 1}\right] \prod_{j \neq i} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X_j \neq 1}\right] \qquad \text{(car les } X_i \text{ sont i.i.d)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 \neq 1)^n} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[X_i \middle| X_i \neq 1\right] \mathbb{P}(X_i \neq 1)\right) \mathbb{P}(X_1 \neq 1)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 \neq 1)^n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i \middle| X_i \neq 1\right] \mathbb{P}(X_1 \neq 1)^n \\
&= n\mathbb{E}\left[X_1 \middle| X_1 \neq 1\right] \\
&= 4n \qquad \left(\text{car } X_1 \middle| X_1 \neq 1 \text{ est uniforme sur } \{2, ..., 6\} \text{ donc de moyenne 4}\right).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, $\mathbb{E}\left[G_n \middle| Y = 0\right] = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[G_n \middle| Y\right] = 4nY.$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[G_n] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G_n \middle| Y\right]\right] \\
&= \mathbb{E}[4nY] \\
&= 4n\mathbb{P}(Y = 1) \\
&= 4n\mathbb{P}(X_1 \neq 1)^n \\
&= 4n(5/6)^n.
\end{aligned}
$$

En regardant les variations de cette fonction par rapport à n, on trouve que $\mathbb{E}[G_n]$ est maximal pour $n = 5$ et $n = 6$. Dans ce cas, on a $\mathbb{E}[G_5] = \mathbb{E}[G_6] \simeq 8.04$. Les premières valeurs de la suite sont donnée par : $\mathbb{E}[G_1] = 3.33, \mathbb{E}[G_2] = 5.55, \mathbb{E}[G_3] = 6.94, \mathbb{E}[G_4] = 7.716, \mathbb{E}[G_5] = 8.04, \mathbb{E}[G_6] = 8.04, \mathbb{E}[G_7] = 7.81...$

Correction exercice 7 : La densité jointe de (X, Y) est donnée par $f_{X,Y}(x, y) = 2\mathbf{1}_{0 \leq x \leq y \leq 1}$. On en déduit que la densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy = 2(1 - x)\mathbf{1}_{x \in [0,1]},$$

et celle de Y est donnée par

$$f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dx = 2y\mathbf{1}_{y \in [0,1]}.$$

On a donc que pour tout $y \in]0, 1[$,

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}\mathbf{1}_{0 \leq x \leq y},$$

et pour tout $x \in]0,1[$,

$$f_{Y \middle| X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x}\mathbf{1}_{x \le y \le 1}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] = \frac{Y}{2},$$

et

$$\mathbb{E}\left[Y \middle| X\right] = \frac{1+X}{2}.$$

Correction exercice 8 :

1. Vous êtes censés trouver $f_Y(y) = \sqrt{\pi/2}\frac{y^2}{2}\exp(-y^2/2)\mathbf{1}_{y \ge 0}$ puis

$$f_{X \middle| Y}(x,y) = \frac{2x}{y^2}\mathbf{1}_{x \in [0,y]},$$

   et enfin

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] = \frac{2}{3}Y.$$

2. Vous êtes censés trouver $f_Y(y) = e^{-y}\mathbf{1}_{y>0}$ puis

$$f_{X \middle| Y}(x,y) = \frac{1}{y}e^{-x/y}\mathbf{1}_{x>0},$$

   (loi exponentielle de paramètre $1/y$) et enfin

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] = Y.$$

3. Vous êtes censés trouver $f_Y(y) = \frac{2}{5}4 - 3y\mathbf{1}_{y \in [0,1]}$ puis

$$f_{X \middle| Y}(x,y) = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}\mathbf{1}_{x \in [0,1]},$$

   et enfin

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] = \frac{5-4y}{2(4-3y)}.$$

Correction exercice 10 : Cas discret : Dans ce cas, E est discret et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$. Soit donc $A \in \mathcal{P}(E)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{Y \in A}\right] &= \sum_{y \in A} \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{Y=y}\right] \\
&= \sum_{y \in A} \mathbb{E}\left[X \middle| Y = y\right] \mathbb{P}\left(Y = y\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] \mathbf{1}_{Y \in A}\right]
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'espérance conditionnelle discrète est bien celle vu au début du TD.
Cas à densité : Dans ce cas, $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Soit donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que le couple (X,Y) a une densité sur $\mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^d$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{Y \in A}\right] &= \int_{y \in A}\int_{x \in \mathbb{R}^{d'}} x f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{y \in A}\int_{x \in \mathbb{R}^{d'}} x f_{X|Y}(x,y)f_Y(y)dydx \\
&= \int_{y \in A}\left(\int_{x \in \mathbb{R}^{d'}} x f_{X|Y}(x,y)dx\right) f_Y(y)dy \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] \mathbf{1}_{Y \in A}\right].
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'espérance conditionnelle à densité est bien celle vu au milieu du TD.