TD 2 - Moments

lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des réels strictement positifs. Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ des variables indépendantes suivant des lois gamma de paramètres respectifs $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

1. Déterminer la loi jointe du vecteur $\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, Y_1+Y_2\right)$.
2. $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et Y_1+Y_2 sont-elles indépendantes ?
3. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_2}\right)$ de $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}$
4. Montrer que le vecteur $\left(\frac{Y_1}{Y_1+\cdots+Y_n}, \ldots, \frac{Y_{n-1}}{Y_1+\cdots+Y_n}\right)$ est indépendant de $Y_1+\cdots+Y_n$
5. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i}{Y_1+\cdots+Y_n}\right)^{\beta_i}\right)$.
6. Calculer la covariance de $\frac{Y_1}{Y_1+\cdots+Y_n}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+\cdots+Y_n}$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire d'espérance finie.

1. (Inégalité de Jensen) Montrer que pour toute fonction convexe ϕ, $\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbb{E}(X))$.
2. Soit p, q deux réels tels que $1 \leq p \leq q$. Montrer que $||X||_p \leq ||X||_q$.
3. Soit p un réel tel que $p \geq 1$. Montrer que $||X||_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} ||X||_\infty$.

Exercice 3

Soit N une variable aléatoire à valeur dans $[\![0;n]\!]$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables iid d'espérance et variance finies.

1. Quelle est l'espérance de $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$?
2. Quelle est la variance de $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$?
3. Montrer que N et $\sum_{i=1}^{N} X_i$ sont indépendants si et seulement si N est déterministe.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire d'espérance et de variance finie.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}((X-a)^2)$.
2. Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$ on note f_A la fonction définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A \text{ si } x \leq -A \\ x \text{ si } x \in [-A; A] \\ A \text{ si } x \geq A. \end{cases}$$

   Montrer que si $A \geq |\mathbb{E}(X)|$ alors $\mathrm{Var}(f_A(X)) \leq \mathrm{Var}(X)$