Feuille de TD n° 6: Convergence en loi

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1 : Autour de la convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$.

1. Rappeler la définition de la convergence en loi notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$.
2. Montrer que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ et que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est continue, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} f(X)$
3. On rappelle que la convergence en probabilité implique la convergence en loi. Inversement, montrer que la convergence en loi vers une constante $c \in \mathbb{R}^d$ implique la convergence en probabilité vers c. On pourra utiliser la fonction continue bornée $f_\varepsilon(x) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\|x-c\|\right)$ et l'inégalité $\mathbf{1}_{\|x-c\|\geq\varepsilon} \leq f_\varepsilon(x)$ valable pour tout x dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2 : Convergence en loi du maximum de v.a i.i.d

On rappelle que pour des variables aléatoires réelles

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x), \text{ pour tout } x \text{ où } F_X \text{ est continue}\right)$$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a i.i.d. On définit :

$$X_n = \max(U_1, ..., U_n).$$

1. On suppose que $U_1 \sim \mathcal{U}([0,\theta])$
   (a) Calculer la fonction de répartition de X_n. (On pourra se souvenir de l'exercice 2 de la feuille de TD 4.
   (b) Montrer que
   $$\frac{n(\theta - X_n)}{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} Y,$$
   où Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
2. On suppose que $U_1 \sim \mathcal{E}(1)$
   (a) Calculer la fonction de répartition de X_n. (On pourra se souvenir de l'exercice 3 de la feuille de TD 4.
   (b) Montrer que
   $$X_n - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} Z,$$
   où Z suit une loi de Gumbel caractérisée par sa fonction de répartition
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Exercice 3 : Convergence en loi pour des v.a continues

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi donnée par une densité f_n et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi donnée par une densité f. On rappelle que si f_n converge presque partout vers f, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$.

1. On suppose que $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ et que $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\lambda)$.
2. On suppose que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ et que $(\mu_n, \sigma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\mu, \sigma)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice 4 : Convergence en loi pour des v.a discrètes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{N}$ et X une v.a dans $\mathbb{N}$. On rappelle que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \Longleftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k)\right).$$

1. On suppose que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathrm{Poi}(\theta)$
2. Application : Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louée ait un accident est égale à $0,2\%$. On suppose que les accidents sont indépendants les uns des autres. Chaque jour, 1000 voitures de la société sont en circulation. On note N le nombre de voitures accidentées.
   (a) Quelle est la loi de N ?
   (b) Donner une valeur approchée de la probabilité pour qu'il y ait au moins 5 voitures accidentées dans la journée.

Exercice 5 : Convergence en loi de v.a discrètes vers une v.a continue et vice-versa

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a réelles.

1. On suppose que X_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Montrer que
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{U}([0,1]).$$
2. On suppose que $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ et que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ avec $\theta > 0$. Montrer que
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\theta).$$
3. On suppose que $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n)$ et que $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} 0.$$