Feuille de TD n° 9:

Espérance conditionnelle discrète et à densité

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

1 Espérance conditionnelle discrète

Soit X et Y deux v.a définies sur un même espace de probabilités. On suppose que Y est une v.a discrète. Si X est intégrable, on définit alors *l'espérance conditionnelle de X sachant Y* comme la variable aléatoire :

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right] := \sum_y \mathbb{E}\left[X \middle| Y = y\right] \mathbf{1}_{\{Y=y\}},$$

où $\mathbb{E}\left[\cdot \middle| Y = y\right]$ est l'espérance sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|Y = y)$:

$$\mathbb{E}\left[X \middle| Y = y\right] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=y\}}]}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

Exercice 1 : Somme d'un nombre aléatoire de v.a i.i.d

Soit N une variable aléatoire intégrable à valeur dans $\mathbb{N}$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable et indépendante de N. Soit $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left[S \middle| N\right]$ puis $\mathbb{E}\left[S\right]$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[S^2 \middle| N\right]$ puis en déduire $\mathbb{E}\left[S^2\right]$ puis que
$$\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}[X_1]^2.$$
3. Retrouvez ce résultat en calculant directement $\mathrm{Var}\left(S \middle| N\right)$ et en utilisant la formule de décomposition de la variance :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}\left(X \middle| Y\right)\right] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right]\right).$$

Exercice 2 : Combien faut-il lancer de dés ?

On considère le jeu suivant. Vous choisissez un nombre n de dés équilibrés à 6 faces. Votre score est égale à la somme des résultats des dés si aucun dé n'est tombé sur 1 et est nul sinon ! Quelle est l'espérance du score sachant qu'aucun dé n'est tombé sur 1 ? Combien de dés avez vous intérêt à lancer pour maximiser votre espérance de gain ?

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des v.a i.i.d intégrables. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Calculer $\mathbb{E}\left[S_n \middle| X_1\right]$ et $\mathbb{E}\left[X_1 \middle| S_n\right]$.

Indication : comparer les $\mathbb{E}\left[X_i \middle| S_n\right]$ pour $1 \leq i \leq n$.

Exercice 4 :

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de Poisson indépendantes et de paramètre λ_1 et λ_2.

1. Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$?
2. Calculer $\mathbb{E}\left[X_1 \middle| X_1 + X_2\right]$.

2 Espérance conditionnelle à densité

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que (X, Y) admet une densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesque 2-dimensionnelle. La densité marginale de Y est $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$.

Alors, pour tout $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable :

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X) \,\middle|\, Y\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f_{X|Y}(x, Y) dx,$$

où $f_{X|Y}(x,y) := \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ est la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 5 : Variables aléatoires sur le disque unité

Soit (X, Y) un vecteur de R^2 distribué uniformément sur le disque fermé de rayon unité. Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 6 :

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires Exponentielles indépendantes et de paramètre λ.

1. Quelle est la densité de probabilité de $X_1 + X_2$?
2. Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$?

Exercice 7 :

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.
Calculer $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right]$ et $\mathbb{E}\left[Y \,\middle|\, X\right]$.

Exercice 8 : Calcul d'espérances conditionnelles

Calculer $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right]$ lorsque la loi du couple (X, Y) admet la densité :

1. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} x e^{-y^2/2} 1_{\{0<y<x\}}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{y} \exp(-\dfrac{x}{y} - y) \mathbf{1}_{]0,+\infty[^2}(x,y)$
3. $f(x,y) = \dfrac{12}{5} x(2 - x - y) \mathbf{1}_{]0,1[^2}(x,y)$.

Exercice 9 : [Un exercice de l'examen de 2013]

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité :

$$f(x,y) = 4y(x-y)\exp(-(x+y))\mathbf{1}_{\{0 \le y \le x\}}\,.$$

Calculer $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ et $\mathbb{P}\left[X < 1 \,\middle|\, Y = y\right]$.

3 Espérance conditionnelle : cas général

Soit X une v.a réelle intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu. On définit *l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$*, notée $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right]$, comme l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable vérifiant que :

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}\left[X \mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right] \mathbf{1}_A\right].$$

Si Y est une v.a définie sur le même espace et est à valeur dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, on définit :

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right] := \mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \sigma(Y)\right],$$

où $\sigma(Y) := \{Y^{-1}(A),\ A \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{F}$ est la tribu engendrée par Y.

Exercice 10 :

Montrer que cette définition générale coïncide avec les définitions vues précédemment pour les cas discrets et à densité.