

Éléments de correction TD n° 1

MARTINGALES DISCRÈTES ET TEMPS D'ARRÊTS

Exercice 1 : Exemples de martingales discrètes autour de marches aléatoires.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d intégrables et d'espérance $m = \mathbb{E}[Y_1]$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit la *marche aléatoire* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = a \\ S_n = a + \sum_{i=1}^n Y_i, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (\mathcal{F}_n) -adapté.
2. (a) On suppose que $m = 0$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale.
 (b) On suppose maintenant que $m > 0$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -sous-martingale.
 Donner la *décomposition de Doob-Meyer* de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $S_n = M_n + A_n$, où $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus adapté croissant.
Indication : On pourra chercher une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $M_n = S_n - \lambda n$ soit une martingale.
3. À partir de maintenant, les Y_n ont pour loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. Le processus stochastique $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans ce cas appelé *Marche Aléatoire Simple* (MAS).
 (a) Montrer que S_n^2 est une (\mathcal{F}_n) -sous-martingale et que $S_n^2 - n$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale.
 Quelle est la décomposition de Doob-Meyer de $(S_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$?
 (b) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \xi \in \mathbb{R}$ tel que $(e^{\lambda S_n - \xi n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit une (\mathcal{F}_n) -martingale.

Correction exercice 1 : Exercice corrigé en classe.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X .

Correction exercice 2 :

- Le processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -adapté car $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ est une variable aléatoire \mathcal{F}_n -mesurable.
- Pour tout entier n , la variable aléatoire Y_n est intégrable car on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Y_n|] &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X||\mathcal{F}_n]] \\ &= \mathbb{E}[|X|] < +\infty.\end{aligned}$$

- Enfin, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}|\mathcal{F}_n]] \\ &= \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \text{ (car } \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}) \\ &= Y_n.\end{aligned}$$

Le processus stochastique $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une martingale.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S, T)$, $S \vee T = \max(S, T)$ et $S + T$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T < \infty} X_T$ est \mathcal{F}_T -mesurable.

Correction exercice 3 :

1. Les variables $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont bien des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Ensuite, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\{S \wedge T \leq n\} &= \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \\ \{S \vee T \leq n\} &= \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \\ \{S + T = n\} &= \bigcup_{i=0}^n \{S = i\} \cap \{T = n - i\}.\end{aligned}$$

Or, S et T sont des temps d'arrêts, donc tous les événements $\{S \leq n\}$, $\{S = i\}$ et $\{T \leq n\}$, $\{T = n - i\}$ sont \mathcal{F}_n -mesurables si $i \leq n$.

On en conclut que $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont des temps d'arrêts.

2. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Il faut montrer que $A \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, montrons que pour tout entier n , $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}A \cap \{T \leq n\} &= A \cap \{S \leq T \leq n\} \text{ (car } S \leq T) \\ &= A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\},\end{aligned}$$

qui appartient à \mathcal{F}_n car $A \in \mathcal{F}_S$ donc $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ car T est un temps d'arrêt.

On a donc bien que $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

3. * Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrons que $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}_T$ en montrant que :
- $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}$ (où \mathcal{F} est la tribu sous-jacente à l'espace de probabilité qui contient en particulier toutes les sous-tribus \mathcal{F}_n de la filtration)
 - $\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Pour le premier point, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} \{Y_T \in A\} &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{Y_T \in A\} \cap \{T = k\} \cup \{Y_T \in A\} \cap \{T = +\infty\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k \in A\} \cap \{T = k\} \cup \{0 \in A\} \cap \{T = +\infty\} \end{aligned}$$

qui appartient à la tribu \mathcal{F} car les variables aléatoires X_k et T sont mesurables par rapport à la tribu \mathcal{F} .

Ensuite,

$$\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{X_k \in A\} \cap \{T = k\}$$

qui appartient à \mathcal{F}_n car X_k est \mathcal{F}_k -mesurable ainsi que $\{T = k\}$ donc $\{X_k \in A\} \cap \{T = k\}$ est \mathcal{F}_n -mesurable.

Cela prouve que Y_T est \mathcal{F}_T -mesurable.

Exercice 4 : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple issue de 0 définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ si $n \geq 1$ où les $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d de loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1, S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, \dots, 4\}, S_n = 0\}$.

Correction exercice 4 : (proposée par Hugo Vaneuville)

1. Montrons que τ est un temps d'arrêt. Pour cela, on montre que $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, τ est le premier temps (plus grand que 1) de retour en 0. Donc, si $n = 0$, alors $\{\tau \leq n\} = \emptyset$ et si $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \{\tau \leq n\} &= \{ \text{la marche aléatoire est revenue en 0 avant le temps } n \} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \{Y_1 + \dots + Y_k = 0\}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, Y_1, \dots, Y_k sont des variables aléatoires réelles mesurables par rapport à \mathcal{F}_n par définition de cette tribu. Donc la somme $Y_1 + \dots + Y_k$ est aussi mesurable par rapport à \mathcal{F}_n , ce qui implique que $\{Y_1 + \dots + Y_k = 0\} \in \mathcal{F}_n$.

- Montrons que T n'est pas un temps d'arrêt. Supposons par l'absurde que c'est un temps d'arrêt. Cela implique que $\{T = 2\}$ est mesurable par rapport à \mathcal{F}_2 . Or, \mathcal{F}_2 est indépendante de $\sigma(Y_3, Y_4)$, donc $\{T = 2\}$ est indépendant de $\{Y_3 + Y_4 = 0\}$ et on obtient que :

$$\mathbb{P}[T = 2 \text{ et } Y_3 + Y_4 = 0] = \mathbb{P}[T = 2] \mathbb{P}[Y_3 + Y_4 = 0].$$

Or le membre de gauche est nul car si $T = 2$ alors $S_2 = 0$ et $S_4 \neq 0$ donc $Y_3 + Y_4 \neq 0$. Par ailleurs, le membre de droite est strictement positif car $T = 2$ si et seulement si $X_1 = -X_2$ (ce qui a probabilité $1/2$ par indépendance de Y_1 et Y_2) et $\mathbb{P}[Y_3 + Y_4 = 0] = 1/2$ donc est strictement positive. On est bien arrivés à une contradiction.

Exercice 5 : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à \mathcal{F}_{n-1} . Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n , H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^n H_k (M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1.$$

- Montrez que $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T \geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction exercice 5 :

- (proposée par Hugo Vaneuville) Le vocabulaire "prévisible" vient de l'observation suivante : H_k étant mesurable par rapport à \mathcal{F}_{k-1} , on connaît déjà cette variable aléatoire si on a toute l'information disponible avant le temps $k - 1$.

Montrons que $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale. Pour cela on montre les trois propriétés suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est \mathcal{F}_n -mesurable. Le cas $n = 0$ vient du fait que N_0 est une constante donc est mesurable par rapport à n'importe quelle tribu. Pour $n \geq 1$, remarquons d'abord que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, M_k est \mathcal{F}_k -mesurable et H_k, M_{k-1} sont \mathcal{F}_{k-1} -mesurable. Par croissance de la filtration, ils sont \mathcal{F}_n -mesurable, donc N_n est obtenu à partir de sommes et produits finis de variables \mathcal{F}_n -mesurables donc est \mathcal{F}_n -mesurable.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est intégrable. Comme une somme de variables intégrables est intégrable, il suffit de montrer que pour tout $k \geq 1$, $H_k M_{k-1}$ et $H_k M_k$ sont intégrables. Or pour tout $k \geq 1$ il existe $A_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|H_k| \leq A_k$ et donc :

$$\mathbb{E}[|H_k M_k|] \leq A_k \mathbb{E}[|M_k|] .$$

$\mathbb{E}[|M_k|]$ est fini car $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ -martingale donc $\mathbb{E}[|H_k M_k|]$ est bien fini. On raisonne de même pour $\mathbb{E}[|H_k M_{k-1}|]$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[N_{n+1} | \mathcal{F}_n] = N_n$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[N_n + H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= N_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n] \quad (\text{car } N_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= N_n + H_{n+1} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] \quad (\text{car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) . \end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ car $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ -martingale et $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_n] = M_n$ car M_n est \mathcal{F}_n -mesurable. On a donc bien $\mathbb{E}[N_{n+1} | \mathcal{F}_n] = N_n$.

2. Remarquons pour commencer que $\{T \geq k\} = \{T \leq k-1\}^c$ appartient à \mathcal{F}_{k-1} pour tout entier non nul k . Cela prouve que $H_k = \mathbf{1}_{T \geq k}$ est bien un processus prévisible. Ensuite, on vérifie que si $T \leq n$, alors

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{T \geq k} (M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^T (M_k - M_{k-1}) = M_T - M_0, \end{aligned}$$

et que si $T > n$, alors,

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{T \geq k} (M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1}) = M_n - M_0. \end{aligned}$$

On a donc que $N_n = M_{T \wedge n} - M_0$. Par ailleurs, d'après la question précédente, N_n est une martingale. Il en suit que le processus arrêté $M_{T \wedge n} = N_n + M_0$ est également une martingale.

Exercice 6 : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b , jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n . Soit

$$T = \inf\{n, S_n \in \{0, a + b\}\}.$$

Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a + b\}$?

2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(M_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.
3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.

Correction exercice 6 : Exercice corrigé en classe.