ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction TD n° 2

MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES CONTINUES

Exercice 1 : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

Correction exercice 1 : Exercice corrigé en classe.

Exercice 2 : Un petit contre-exemple.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Est-ce que le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien ?

Correction exercice 2 : Notons $X_t = \sqrt{t}Z$. On a bien que X_t est de loi $\mathcal{N}(0,t)$ pour tout réel positif t. Par contre, le processus (X_t) n'est pas un mouvement Brownien car les accroissements ne sont pas stationnaires. En effet :

$$X_2 - X_1 = (\sqrt{2}-1)Z \sim \mathcal{N}(0, (\sqrt{2}-1)^2) \neq \mathcal{N}(0, 2-1).$$

On peut aussi dire que les accroissements ne sont pas indépendants. Par exemple $X_2 - X_1 = (\sqrt{2}-1)Z$ n'est pas indépendante de $X_1 = Z$ (elles sont même totalement corrélées car colinéaires).

On a donc un contre-exemple où un processus qui a les mêmes lois marginales que le mouvement Brownien mais qui n'est pas un mouvement Brownien.

Exercice 3 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient W et W^* deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante. Montrez que $(\rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.

<u>Correction exercice 3</u> : Exercice corrigé en classe.

<u>Exercice 4</u> : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et comparer ces résultats avec leurs analogues discrets pour la Marche Aléatoire Simple vus à la question 3. de l'exercice 1 du TD 1.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

<u>Correction exercice 4</u> : Exercice corrigé en classe.

<u>Exercice 5</u> : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

<u>Correction exercice 5</u> :

1. Prenons une suite quelconque de temps croissants $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq 1$ et un ensemble de n réels $a_1, ..., a_n$. Montrons que $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ est une variable aléatoire Gaussienne. On a que :
$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^n a_i B_{t_i} + (\sum_{i=1}^n -a_i t_i) B_1,$$
est de la forme
$$\sum_{i=1}^m a_i' B_{t_i'}.$$
Comme $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien, il s'agit donc d'une variable aléatoire Gaussienne.
On en conclut que $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est une processus Gaussien.

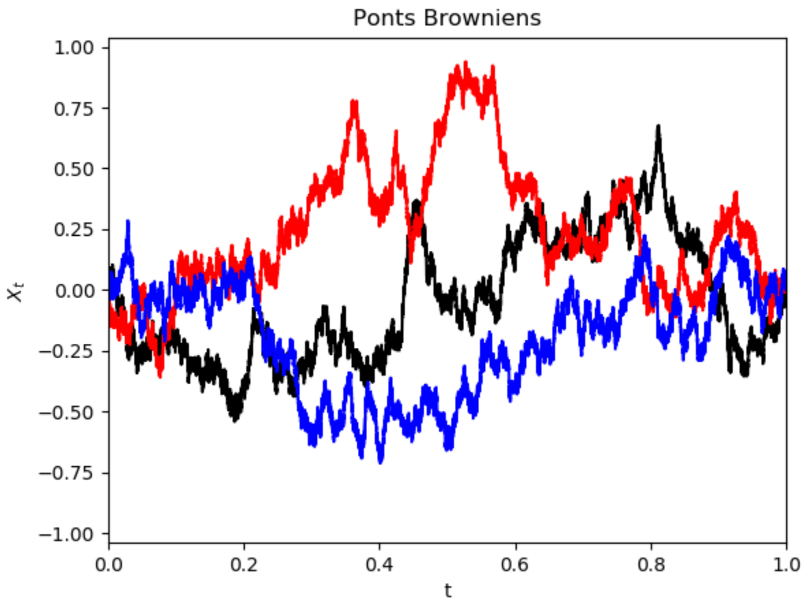

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

2. Pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[B_t] - t\mathbb{E}[B_1] = 0$, donc il s'agit d'un processus Gaussien centré.

   Pour tout $0 \leq s \leq t \leq 1$, on a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_s X_t] &= \mathbb{E}[B_s B_t] - s\mathbb{E}[B_1 B_t] - t\mathbb{E}[B_s B_1] + st\mathbb{E}\left[B_1^2\right] \\ &= s - st - ts + st \\ &= s(1-t).\end{aligned}$$

   Donc $\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = s(1-t)$, $\forall 0 \leq s \leq t \leq 1$.

3. D'après la question précédente, on a que :

$$\mathbb{V}(X_t) = \operatorname{Cov}(X_t, X_t) = t(1-t),$$

   qui est donc maximale en $t = 1/2$ et qui vaut $\mathbb{V}(1/2) = 1/4$.

4. Même si l'espérance est identiquement nulle, il ne s'agit pas d'une martingale car par exemple :

$$\mathbb{E}\left[X_1 \,\middle|\, \mathcal{F}_{1/2}\right] = \mathbb{E}\left[0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{1/2}\right] = 0,$$

   alors que $X_{1/2}$ est une variable aléatoire Gaussienne centré de variance $1/4$ donc n'est pas identiquement nulle.

<u>Exercice 6</u> : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} M_s \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}\left[M_t\right]}{\lambda}.$$

2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} |N_s| \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$

   Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

<u>Correction exercice 6</u> :

1. Introduisons la variable aléatoire suivante :

$$T = \inf\{t \ge 0,\ M_t \ge \lambda\}.$$

   Il s'agit bien d'un temps d'arrêt car c'est un temps d'atteinte et car le processus $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue. Ce temps d'arrêt a été choisi pour que

$$\sup_{s\in[0,t]} M_s \ge \lambda \iff T \le t.$$

   Appliquons alors le théorème d'arrêt pour les sous-martingales aux temps d'arrêts <u>bornés</u> $T \wedge t$ et t (on a bien que $T \wedge t \le t$) :

$$\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathcal{F}_{T\wedge t}] = M_{T\wedge t},$$

   et donc en passant à l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathcal{F}_{T\wedge t}]] &= \mathbb{E}[M_{T\wedge t}] \\
&= \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{T\le t}] + \mathbb{E}[M_t \mathbf{1}_{T>t}] \\
&= \mathbb{E}[\lambda \mathbf{1}_{T\le t}] + \mathbb{E}[M_t \mathbf{1}_{T>t}],\ (\text{car } M_T = \lambda \text{ par continuité}) \\
&\ge \lambda \mathbb{P}(T \le t),\ \ (\text{car } M_t \ge 0) \\
&= \lambda \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} M_s \ge \lambda).
\end{aligned}$$

   On obtient l'inégalité voulue :

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} M_s \ge \lambda) \le \frac{\mathbb{E}[M_t]}{\lambda}.$$

2. Par l'inégalité de Jensen, si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale continue, alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = (N_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale continue et positive. On peut donc appliquer le résultat de l'inégalité précédente à un $\lambda' = \lambda^2$:

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} N_s^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2},$$

et donc

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |N_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2}.$$

Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, nous aurions obtenu l'inégalité

$$\mathbb{P}(|N_t| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2},$$

qui ne donne un contrôle que sur la valeur terminale N_t et non pas sur le sup des valeurs de N_s sur l'ensemble de l'intervalle $[0, t]$. L'hypothèse que $(N_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale est ici crucial.

Remarque : Dans le cours, vous avez vu une inégalité de Doob qui se généralise pour tout espace L^p avec $p > 1$:

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |N_s|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|N_t|^p],$$

qui implique, par l'inégalité de Markov, que :

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |N_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |N_s|^p]}{\lambda^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{\mathbb{E}[|N_t|^p]}{\lambda^p}.$$