ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction TD n° 5

FORMULE D'ITÔ ET APPLICATIONS.

Exercice 1 : Retour sur $\int_0^t B_s dB_s$.

En appliquant la formule d'Itô à B_t^2, (re)montrez que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$.

Remarque : C'est quand même bien plus simple avec la formule d'Itô qu'avec le passage à la limite de l'intégrale stochastique des processus étagés non ?

Correction exercice 1 : Vu en classe.

Exercice 2 : Processus d'Itô et martingale.

1. Écrire le processus $\left(\sin(B_t)e^{-t}\right)_{t\geq 0}$ comme processus d'Itô.
2. Montrer que le processus $\left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Correction exercice 2 : Vu en classe

Exercice 3 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$) :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. Expliquez heuristiquement (en ne vous focalisant que sur l'équation stochastique) pourquoi ce processus a une "force de rappel vers b".
2. En appliquant la formule d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
3. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de X_t, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?

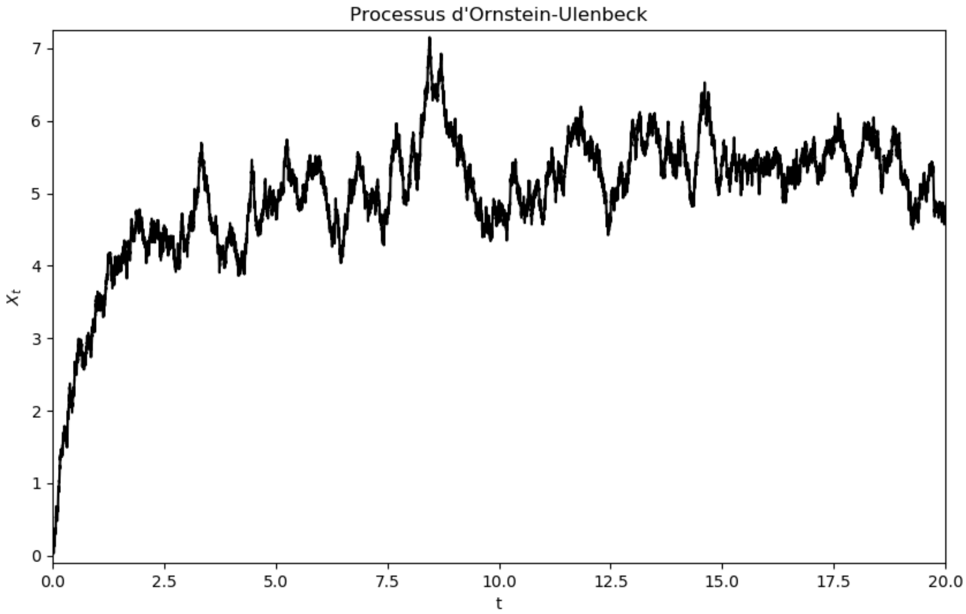

FIGURE 1 – Simulation de la solution de l'équation de Ornstein-Ulenbeck avec $a = \sigma = 1$, $b = 5$ et $x_0 = 0$.

Correction exercice 3 :

1. Dans l'équation différentielle stochastique, $a(b - X_t)dt$ peut être considéré comme un terme de force et σdW_t comme un terme de bruit. Maintenant,
   — Si $X_t \leq b$, alors $a(b - X_t)dt \geq 0$
   — Si $X_t \geq b$, alors $a(b - X_t)dt \leq 0$,
   car $a > 0$. Dans tous les cas, la force $a(b - X_t)dt$ tend à ramener X_t vers b. On peut donc la qualifier de "force de rappel".

2. La deuxième formule d'Ito donne
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{as} dX_s + \int_0^t a(X_s - b)e^{as} ds + 0.$$
car la dérivée seconde de $(t, x) \mapsto (x - t)e^{at}$ par rapport à x est nulle.
En remplaçant dX_t par $a(b - X_t)dt + \sigma dB_t$, on obtient :
$$\begin{aligned} Y_t &= (X_0 - b) + \int_0^t e^{as} a(b - X_s) ds + \int_0^t e^{as} \sigma dB_s + \int_0^t a(X_s - b)e^{as} ds \\ &= X_0 - b + \int_0^t e^{as} \sigma dB_s. \end{aligned}$$
Donc finalement,
$$\boxed{X_t = b + e^{-at}(X_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s.}$$

3. (a) La fonction $s \mapsto e^{as}$ étant déterministe et de carré intégrable, l'intégrale stochastique $\int_0^t e^{as} dB_s$ est une **intégrale de Wiener**. Par conséquent, le processus stochastique associé $(\int_0^t e^{as} dB_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien.

Maintenant, si on prend un ensemble de temps croissants $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et un ensemble de réels $(a_1, ..., a_n)$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^n a_i(b + e^{-at_i}(x_0 - b)) + \sum_{i=1}^n a_i \sigma e^{-at_i} \int_0^{t_i} e^{as} dB_s,$$

peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} = C + \sum_{i=1}^n a'_i \int_0^{t_i} e^{as} dB_s.$$

Or, le processus $(\int_0^t e^{as} dB_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ étant Gaussien, on a que $\sum_{i=1}^n a'_i \int_0^{t_i} e^{as} dB_s$ suit une loi normale. Or, une variable aléatoire Gaussienne plus une constante est encore une loi Gaussienne. Par conséquent, $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ suit une loi normale. On a donc montré que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ était Gaussien.

(b) La fonction espérance est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}\left[b + e^{-at}(x_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s\right] \\
&= b + e^{-at}(x_0 - b) + \sigma e^{-at} \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{as} dB_s\right] \\
&= b + e^{-at}(x_0 - b).
\end{aligned}$$

où la dernière égalité a lieu car $\int_0^t e^{as} dB_s$ est une intégrale de Wiener donc est processus centré.

(c) La fonction de covariance est donnée par :

$$\begin{aligned}
\forall 0 \leq s \leq t,\ \mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\sigma e^{-as} \int_0^s e^{au} dB_u)(\sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dB_u)\right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \mathbb{E}\left[\int_0^s e^{au} dB_u \int_0^t e^{au} dB_u\right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \int_0^{s\wedge t} e^{2au} du \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \frac{e^{2as} - 1}{2a} \qquad \text{car } s \leq t \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}(e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)}),
\end{aligned}$$

où la quatrième égalité a lieu car la fonction de covariance d'un processus de Wiener est donnée par :

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^s \theta_u dB_u \int_0^t \theta_u dB_u\right) = \int_0^{s\wedge t} \theta_u^2 du,$$

(cela s'applique lorsque $t \mapsto \theta_t$ est un processus déterministe de carré intégrable).

(d) On en déduit, en particulier, que

$$\boxed{X_t \sim \mathcal{N}\left(b + e^{-at}(x_0 - b), \frac{\sigma^2(1 - e^{-2at})}{2a}\right)},$$

et que donc

$$\boxed{X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(b, \frac{\sigma^2}{2a}\right)}$$

<u>Exercice 4</u> : Equation de Black et Scholes.

On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$. On fait l'hypothèse que le taux d'actif risqué évolue selon la formule de Black-Scholes. Autrement dit :

$$dS_t^0 = S_t^0 \, r \, dt \,,$$

et :

$$dS_t = S_t \, (\mu \, dt + \sigma \, dW_t) \ ,$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. On appelle actif risqué **actualisé** le processus

$$\left(\widetilde{S}_t\right)_{0\leq t\leq T} := \left(\frac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\leq t\leq T} .$$

Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez S_t^0.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\Big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\Big)$.
3. Donnez l'équation stochastique satisfaite par $\widetilde{S}_t$.