ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2018-2019 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 3

Mouvement Brownien (suite) et Intégrale de Wiener

Exercice 1 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , calculez sa transformée de Laplace :
$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right]$$
pour tout $\lambda > 0$.
2. En déduire que $\mathbb{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty$.

Exercice 2 : Principe de Réflexion et loi du Maximum.

Soit B un mouvement Brownien. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $S_t = \sup_{s \in [0,t]} B_s$ le maximum du mouvement Brownien sur l'intervalle $[0,t]$. Le but de cet exercice est d'utiliser un principe dit "de réflexion" (illustration Figure 1) pour calculer la loi de S_t.

1. On note $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte de a par le mouvement Brownien. On note $B^a_s = B_{s+T_a} - B_{T_a}$. Que pouvez-vous dire du processus $(B^a_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$?
2. Montrez que $\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\ B_t \leq b\right] = \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\ B^a_{t-T_a} \leq b - a\right]$.
3. En déduire que $\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\ B_t \leq b\right] = \mathbb{P}\left[T_a \leq t,\ B^a_{t-T_a} \geq a - b\right]$.
4. En déduire que $\mathbb{P}\left[S_t \geq a,\ B_t \leq b\right] = \mathbb{P}\left[B_t \geq 2a - b\right]$ (voir illustration Figure 1) .
5. En conclure que $\mathbb{P}\left[S_t \geq a\right] = 2\,\mathbb{P}\left[B_t \geq a\right] = \mathbb{P}\left[|B_t| \geq a\right]$ et donc que
$$S_t \overset{d}{=} |B_t|\,.$$

Exercice 3 : Intégrale de Wiener

1. Justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s)\, dB_s$ est bien définie comme intégrale de Wiener.
2. Justifier que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance $E(X_s X_t)$.

3. Montrer que le processus X est une martingale.
4. Quelle est la variation quadratique de X ?

<u>Exercice 4</u> : Vers l'intégrale stochastique générale...

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$, en utilisant la construction vue en cours par approximation par des processus étagés.

1. Montrer que le mouvement Brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *bon processus.*
2. On définit le processus étagé suivant :
$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(t)\,,$$
avec $t_k := \frac{kt}{n}$. Montrer que $B^n \overset{L^2([0,t])}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} B$ c'est à dire que : $\mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s^n - B_s)^2 ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Calculer $\int_0^t B_s^n dB_s$. On pourra exprimer le résultat comme fonction du mouvement Brownien.
4. Montrer enfin que
$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\,.$$

Remarque : On s'assure que B_{t_k} est bien mesurable par rapport à la tribu indexée par la borne gauche de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ à savoir $\mathcal{F}_{t_k}$. Si, par exemple, on remplaçait B_{t_k} par $B_{t_{k+1}}$ qui n'est pas $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable mais $\mathcal{F}_{t_{k+1}}$-mesurable, on obtiendrait un résultat différent (Exercice : le vérifier).

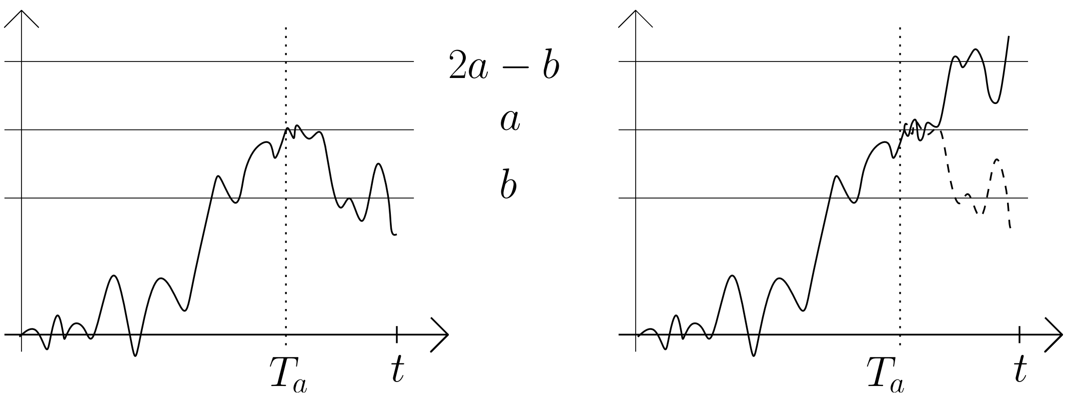

FIGURE 1 – Illustration du principe de réflexion par Hugo Vanneuville. A gauche, un mouvement Brownien satisfaisant l'événement $\{S_t \geq a,\, B_t \leq b\}$. À gauche, le même mouvement Brownien après réflexion pour $s \geq T_a$ et qui vérifie maintenant $B_t \geq 2a - b$. L'idée est que par la propriété de Markov (forte) et par symmétrie, le deuxième processus est aussi un mouvement Brownien.