ISFA - L3 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Probabilités math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction TD 10

Fonction génératrice, Transformée de Laplace

Exercice 1. Loi de Poisson (exam 2019).

1. Déterminer la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Retrouver, à partir de cette fonction génératrice, l'expression de l'espérance et de la variance de cette loi.
3. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

Exercice 2. Fonction génératrice en dimension deux.
Soient $0 < a < b < 1$, et (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi est décrite par

$$\mathbb{P}[X = i, Y = j] = (1-a)(b-a)a^i b^{j-i-1} \mathbb{1}_{\{0 \leq j \leq i\}}.$$

1. Déterminer la fonction génératrice $g_{(X,Y)}$ du couple (X, Y).
2. Déterminer les fonctions génératrices g_X et g_Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3. Identification de la loi avec la fonction génératrice.
Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, dont la fonction génératrice est

$$g_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

pour $t \in [0, 1]$. Déterminer la loi de X, *i.e.* donner $\mathbb{P}[X = i]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Un jeu équitable ?.
On lance n pièce de monnaie différentes (pas forcément équilibrées) de façon indépendante. Si le nombre de faces est pair, vous gagnez, sinon vous perdez. On note $p_i \in [0, 1]$ la probabilité que la pièce numéro i tombe sur "face". À quelle condition sur les p_i ce jeu est-il équitable ?

1. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ n v.a indépendantes telles que pour tout i, $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $G_{S_n}(-1) = 0$ où G_{S_n} est la fonction génératrice de S_n.
2. Calculer G_{S_n}.
3. En conclure que le jeu est équitable si et seulement si au moins une des pièces est équilibrée.

Correction exercice 4 :

1. Le jeu est équitable si et seulement si il y a autant de chance de gagner que de perdre, c'est à dire que la probabilité que S_n soit pair est égale à la probabilité que S_n soit impair. Or,

$$(-1)^{S_n} = \begin{cases} 1 \text{ si } S_n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } S_n \text{ est impair} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} G_{S_n}(-1) &= \mathbb{E}\left[(-1)^{S_n}\right] \\ &= 1 \times \mathbb{P}\left[S_n \text{ est pair}\right] + (-1) \times \mathbb{P}\left[S_n \text{ est impair}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[S_n \text{ est pair}\right] - \mathbb{P}\left[S_n \text{ est impair}\right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \text{Le jeu est équitable} &\Longleftrightarrow \mathbb{P}\left[S_n \text{ est pair}\right] = \mathbb{P}\left[S_n \text{ est impair}\right] \\ &\Longleftrightarrow G_{S_n}(-1) = 0. \end{aligned}$$

2. Comme S_n est la somme de variables aléatoires indépendantes, on a pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} G_{S_n}(t) &= \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (p_i t + 1 - p_i), \end{aligned}$$

car la fonction génératrice d'une v.a de Bernoulli de paramètre p est

$$G_{\mathcal{B}(p)}(t) = t^1 \times p + t^0 \times (1 - p) = pt + 1 - p.$$

3. On a donc

$$G_{S_n}(-1) = \prod_{i=1}^{n} (1 - 2p_i),$$

et donc le jeu est équitable si et seulement si un des facteurs $(1 - 2p_i)$ est nul si et seulement si il existe un indice i tel que $p_i = 1/2$ si et seulement si il existe une pièce qui est équilibrée.

Exercice 5. Transformée de Laplace.
Soit X une variable aléatoire réelle continue, on note f_X sa densité et L_X sa transformée de Laplace, avec $D(L_X)$ le domaine de définition de L_X.

1. Exprimer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$ en fonction de L_X et de ses dérivées.

2. Pour $t \in D(L_X)$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_t(x) = \frac{f_X(x) e^{-tx}}{L_X(t)}.$$

Montrer que g_t est une densité de probabilités.

3. Soit Y_t une variable aléatoire de densité g_t. Déterminer sa transformée de Laplace L_{Y_t}.

4. Calculer $\mathbb{E}[Y_t]$ et $\text{Var}(Y_t)$.

5. (Difficile) Pour quelles fonctions f_X a-t-on $\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(X)$ pour tout $t \in D(L_X)$?

Correction exercice 5 : Correction proposée par Thomas Gerrard *Soit X une variable aléatoire réelle continue, on note f_X sa densité et L_X sa transformée de Laplace, avec $D(L_X)$ le domaine de définition de L_X.*

1. Rappelons d'abord l'expression de L_X : $L_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{-tX}\right]$, pour $t \in D(L_X)$. On peut calculer les moments de X à partir de L_X :
$$\mathbb{E}[X] = -L_X'(0) \text{ et } \mathbb{E}\left[X^2\right] = L_X''(0), \text{ donc } \mathrm{Var}(X) = L_X''(0) - L_X'(0)^2.$$

2. Remarquons d'abord que $g_t(x) \geq 0$ pour $t \in D(L_X)$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifions que $\int g_t(x)dx = 1$.
$$\int g_t(x)dx = \frac{1}{L_X(t)} \int e^{-tx} f_X(x)dx = \frac{1}{L_X(t)} \mathbb{E}\left[e^{-tX}\right] = 1.$$

3. Pour $t \in D(L_X)$,
$$L_{Y_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{-uY_t}\right] = \int e^{-uy} g_t(y)dy = \frac{1}{L_X(t)} \int e^{-uy} e^{-ty} f_X(y)dy = \frac{L_X(t+u)}{L_X(t)},$$
et ce pour tout u tel que $t + u \in D(L_X)$.

4. De même qu'en 1), on a
$$\mathbb{E}[Y_t] = -L_{Y_t}'(0) = -\frac{L_X'(t)}{L_X(t)} \text{ et } \mathrm{Var}(Y_t) = L_{Y_t}''(0) - L_{Y_t}'(0)^2 = \frac{L_X''(t)}{L_X(t)} - \left(\frac{L_X'(t)}{L_X(t)}\right)^2.$$

5. Notons $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. On cherche donc les lois $\mathbb{P}_X$ telles que $\frac{L_X''(t)}{L_X(t)} - \left(\frac{L_X'(t)}{L_X(t)}\right)^2 = \sigma^2$ pour $t \in D(L_X)$. Or
$$\frac{L_X''(t)}{L_X(t)} - \left(\frac{L_X'(t)}{L_X(t)}\right)^2 = \frac{L_X''(t)L_X(t) - L_X'(t)^2}{L_X(t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L_X'(t)}{L_X(t)}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \ln(L_X(t)).$$
Donc on cherche $\mathbb{P}_X$ telle que $\ln(L_X(t)) = \frac{\sigma^2 t^2}{2} + C_1 t + C_2$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in D(L_X)$. Remarquons d'abord que $L_X(0) = \mathbb{E}[1] = 1$, donc $C_2 = 0$. On cherche donc les lois dont la transformée de Laplace s'écrit $L_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + C_1 t}$, ce qui est exactement la transformée de Laplace d'une loi normale $\mathcal{N}(-C_1, \sigma^2)$. Les fonctions f_X recherchées sont donc les densités gaussiennes $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+C_1)^2}{2\sigma^2}}$.

   NB : La transformée de Laplace d'une loi normale et sa transformée de Fourier (ou fonction caractéristique) sont assez utiles à connaître, d'autant qu'elles ne sont pas faciles à retrouver par le calcul. C'est d'ailleurs un exercice intéressant : calculer d'abord la transformée de Laplace d'une $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, en montrant qu'elle vérifie une équation différentielle du premier ordre, puis en déduire la transformée de Laplace d'une $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en écrivant $N = \mathbb{E}[N] + (N - \mathbb{E}[N])$.