Éléments de correction TD 3

Éléments aléatoires

Exercice 1.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Doivent-elles avoir le même espace de départ ? Le même espace d'arrivée ?
2. Même question pour deux variables aléatoires de même loi.

Exercice 2.
On considère l'espace $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. On note X la variable aléatoire définie par $X(i,j) = i$ pour tout $(i,j) \in \Omega$. Combien peut-on construire de variables aléatoires Y sur Ω telles que Y a même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Exercice 3.
Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, combien peut-on construire de variables aléatoires Y sur Ω telles que Y est indépendante de X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Exercice 4.
Soit Ω un univers, et $A, B \subset \Omega$ des événements. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Exercice 5.
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}[X=0] = \mathbb{P}[X=1] = \mathbb{P}[Y=0] = \mathbb{P}[Y=1] = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Peut-on calculer $\mathbb{E}[XY]$? Si oui, quelle est sa valeur ? Si non, quelles sont les valeurs possibles (donner un intervalle) ?
2. On suppose à présent X et Y indépendantes. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Quelle est la loi de (X,Y) ?
3. On suppose que $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{3}$. Peut-on en déduire la loi de (X,Y) ?

Exercice 6.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X, Y, U, V quatre variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi du couple (X,Y), $\mathbb{P}_U$ la loi de U et $\mathbb{P}_V$ celle de V. On suppose $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V$. Que peut-on en déduire ?

a) (X,Y) et (U,V) ont la même loi.

b) U et V sont indépendantes.

c) X et U ont la même loi.

d) X et Y ont la même loi.

e) X et Y sont indépendantes.

Exercice 7.
Rappelons que si $\lambda > 0$, une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Montrer que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

<u>Correction exercice 7</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 + X_2 = k] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=0}^{k} (X_1 = i \cap X_2 = k - i)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X_1 = i \cap X_2 = k - i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}[X_1 = i]\, \mathbb{P}[X_2 = k - i] && \text{par indépendance de } X_1, X_2 \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \, \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \\
&= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^k && \text{par la formule du binome de Newton}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}[X_1 + X_2 = k] = \tfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.}$$

La variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 8.
Soit $n \geq 1$, et $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes de même loi, avec

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_1 = 0] = p,$$

où $0 < p < 1$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$, et donner la loi de S_n.

Correction exercice 8 : Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] \\ &= n\mathbb{E}[X_1] \\ &= n(0 \times \mathbb{P}[X_1 = 0] + 1 \times \mathbb{P}[X_1 = 1]) \\ &= np.\end{aligned}$$

Maintenant, S_n prend des valeurs entre 0 et n. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour que $S_n = k$, il faut et il suffit que l'ensemble des indices i tels que $X_i = 1$ soit de cardinal k ce qui se traduit par

$$\{S_n = k\} = \bigcup_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \{X_i = 1 \, \forall i \in I\} \cap \{X_j = 0 \, \forall j \notin I\}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n = k] &= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \mathbb{P}[X_i = 1 \, \forall i \in I \, \cap \, X_j = 0 \, \forall j \notin I] \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} \mathbb{P}[X_i = 1] \prod_{j \notin I} \mathbb{P}[X_j = 0] \qquad \text{par indépendance des } X_i \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\end{aligned}$$

car il y a exactement $\binom{n}{k}$ partie I incluses dans $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. D'où

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}[S_n = k] = \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Il s'agit d'une loi binomiale de paramètre (n, p).

Exercice 9.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suit une loi géométrique, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{1}_{\{k \geq 1\}} (1-p)^{k-1} p.$$

Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Correction exercice 9 : Par définition de l'espérance d'une v.a discrète,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k\mathbb{P}[X = k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p.\end{aligned}$$

Maintenant, on peut utiliser que la série entière de rayon de convergence 1:

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Par ailleurs, par somme de série géométrique, $g(x) = (1-x)^{-1}$ et donc $g'(x) = (1-x)^{-2}$ pour tout $x \in]-1,1[$. On en déduit l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En appliquant cela à $x = 1-p$, on obtient finalement que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\right] &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p\,\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X\right] = \tfrac{1}{p}.}$$