# Éléments de correction TD 8

## Moments, variance et covariance

**Exercice 1. Loi exponentielle.**
Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Calculer l'espérance, la variance et la médiane de $X$.

**Exercice 2. Moments de la Gaussienne.**
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $m_n := \mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 3.**
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, où $\mathrm{Var}(X) = 1$ et $\mathrm{Var}(Y) = 2$.
Calculer $\mathrm{Var}(Z)$, où $Z = 2X - Y - 5$.

**Exercice 4.**
Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire continu, de densité

$$f(x,y) = kx\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y),$$

où $k$ est une constante. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

**Exercice 5.**
Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire continu, de densité

$$f(x,y) = \frac{k}{\sqrt{xy}}\mathbb{1}_D(x,y),$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq y \leq 1\}$ et $k$ une constante positive à déterminer.

1. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer les densités de $X$ et $Y$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

**<u>Correction exercice 5</u> :**

1. Les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes car le support de $(X,Y)$, c'est à dire le domaine $D$, n'est pas rectangulaire mais triangulaire (si $X$ et $Y$ étaient indépendantes, le support de $(X,Y)$ serait égal au produit ensembliste des supports de $X$ et de $Y$ et serait donc un rectangle).

2. Commençons par déterminer la valeur de $k$ pour que $f$ soit une densité. Après calcul, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 2k.$$

Cette intégrale doit être égale à 1. On en déduit que

$$\boxed{k = \frac{1}{2}.}$$

La densité de $X$ est donnée par

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\
&= \mathbb{1}_{x\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \mathbb{1}_{x\in[0,1]}.
\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \\
&= \mathbb{1}_{y\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{x}} dy \\
&= \mathbb{1}_{y\in[0,1]}.
\end{aligned}$$

On remarque que $Y$ est de loi uniforme sur $[0,1]$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_R x f_X(x) dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x dx \\
&= [2/3x^{3/2}]_0^1 - [1/2x^2]_0^1 \\
&= 2/3 - 1/2 \\
&= 1/6.
\end{aligned}$$

Et comme $Y$ est de loi uniforme sur $[0,1]$, on a

$$\mathbb{E}[Y] = 1/2.$$

4. Commençons par calculer $\mathbb{E}[XY]$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{R^2} xyf(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\left(\int_0^x \sqrt{y}dy\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\left[2/3y^{3/2}\right]_0^x dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\times 2/3x^{3/2}dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2dx \\
&= \frac{1}{3}\left[1/3x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Puis

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1/9 - 1/6\times 1/2 = 1/36.$$

**Exercice 6.**
Donner un exemple de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ telles que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ mais $X$ et $Y$ ne soient pas indépendantes.

**Correction exercice 6 :** Considérer $U$ et $S$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \sim \mathcal{U}([-1,1])$ et $S$ soit uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $X = U$ et $Y = SU$. On peut vérifier que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes (par exemple $\mathbb{P}[X\in[-1/2,1/2]\cap Y\in[-1/2,1/2]] = \mathbb{P}[U\in[-1/2,1/2]] \neq \mathbb{P}[X\in[-1/2,1/2]]\,\mathbb{P}[Y\in[-1/2,1/2]]$) mais que pourtant

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[SU^2\right] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[SU] = \mathbb{E}[S]\mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}[S]\mathbb{E}[U]^2 = 0.$$

car $S$ et $U$ sont indépendantes et que $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[U] = 0$.

**Exercice 7.**
Soit $X$ une variable aléatoire réelle de carré intégrable. Montrer que

$$\operatorname{Var}(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right].$$

**Correction exercice 7 :** On a pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2a\mathbb{E}[X] + a^2.$$

Considérons la fonction

$$f : a \mapsto \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2a\mathbb{E}[X] + a^2.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré. En étudiant al fonction, on vérifie facilement que $f$ admet un unique minimum atteint en $a = \mathbb{E}[X]$.
Donc

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] = \inf_{a\in\mathbb{R}} f(a) = f(\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \operatorname{Var}(X).$$

**Exercice 8. Moments et fonction de survie.**
Soit $X$ une variable aléatoire réelle positive. Montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[X^p\right] = \int_0^\infty p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}\left[X > t\right] \mathrm{d}t.$$

Indication : commencer par montrer que

$$\mathbb{E}\left[X^p\right] = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} p\, t^{p-1} \mathbb{1}_{t<x}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).$$

<u>**Correction exercice 8**</u> **:** L'astuce est décrire $x^p = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1}\mathbb{1}_{t<x}dt$ puis d'utiliser le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^p\right] &= \int_{\mathbb{R}_+} x^p \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_0^x pt^{p-1} dt \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1} \mathbb{1}_{t<x} dt \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} p\, t^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{t<x}\, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \right) \mathrm{d}t \qquad \text{par le théorème de Fubini} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} p\, t^{p-1} \mathbb{P}_X\left( ]t, +\infty] \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}\left[X > t\right] \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

**Exercice 9. Loi faible des grands nombres.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées) de carré intégrable.

1. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right]$ et $\mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]\right| \geq \varepsilon\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : on dit que la suite de variable aléatoires $(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}\left[X_1\right]$.

**Correction exercice 9 :**

1. Par linéarité :
$$\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right],$$
car les $X_i$ ont tous la même loi donc ont même espérance.

   Ensuite, par indépendances des $X_i$,
$$\mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\left(X_i\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(X_1\right),$$
car les $X_i$ ont tous la même loi donc ont même variance.

2. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, on en déduit que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mathbb{E}\left[X_1\right]\right| \geq \varepsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right]\right| \geq \varepsilon\right] \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}\left(X_1\right)}{n\,\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$