TD 1
Espaces probabilisés discrets

Exercice 1.
On veut modéliser le lancer de deux dés à six faces, un rouge et un noir. Trois modèles sont proposés :

a) $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, où l'élément (i,j) de Ω_1 représente l'éventualité «le dé rouge a donné i, et le dé noir a donné j».

b) $\Omega_2 = \{(i,j) \in \{1,...6\}^2, i \leq j\}$, où l'élément (i,j) de Ω_2 représente l'éventualité «le résultat des dés, mis dans l'ordre croissant, est (i,j)».

c) $\Omega_3 = \{2,3,...,12\}$, où l'élément k de Ω_3 représente l'éventualité «la somme des résultats des dés est k».

Pour chacun de ces modèles, donner la loi de probabilité dont il faut munir l'univers choisi afin qu'il corresponde bien à l'expérience.
De plus, on définit A : «Les deux dés ont donné 2 et 3» ; B : «le dé rouge a donné 6» ; C : «au moins un dés a donné 6» ; D : «la somme des deux dés est 4 ou 5». Pour chaque modèle, déterminer si A, B, C et D sont des événements. Si oui, les écrire comme sous-ensemble de l'univers et donner leur probabilité.

Exercice 2. Paradoxe des anniversaires.
Dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité que deux personnes soient nées le même jour ? Pour quels n cette probabilité dépasse-t-elle $\frac{1}{2}$?

Exercice 3.
On lance 5 fois un dé équilibré. On note N le nombre de 6 obtenu en tout, et on note S_i l'événement «le i-ème lancer a donné un 6». Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

1. $\{N=2\} = \bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j)$.
2. $\{N=0\} = \bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i}$.
3. $\{N=2\} \subset \bigcup_{i=1}^{5} S_i$.
4. $\{N=2\} = \bigcap_{i \neq j} (S_i \cup S_j)$

Exercice 4.
Soit Ω un univers, C un événement, et $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur Ω. Sans hypothèse supplémentaire, lesquelles des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ suivantes sont bien des probabilités ?

1. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A] + \mathbb{P}_2[A]$.
2. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A]\mathbb{P}_1[C] + \mathbb{P}_2[A]\mathbb{P}_1[\overline{C}]$.
3. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A \cap C] + \mathbb{P}_2[A \cap \overline{C}]$

Exercice 5.
Soient A et B deux événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Sans hypothèse supplémentaire, lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

1. $\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$.
2. Si $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \frac{1}{4}$.
3. $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B])$.
4. Si $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1$, alors $\mathbb{P}[A \cap B] = 1$.
5. $\mathbb{P}[A \cap B]^2 \leq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$.

Exercice 6. Lemme de Borel-Cantelli.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\geq 1} A_n\right] \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[A_n]\,.$$
2. En déduire le lemme de Borel-Cantelli : si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[A_n] < \infty$, alors $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 0$.
3. Une sonde spatiale s'éloigne de la Terre à vitesse constante, en renvoyant un signal toutes les secondes. Mais son système gyroscopique est défectueux, et le signal est envoyé dans une direction uniformément au hasard. Ainsi, si la sonde est à une distance d de la Terre, le signal atteindra le récepteur sur Terre avec une probabilité proportionnelle à $\frac{1}{d^2}$.

   Montrer qu'il existe presque sûrement un instant à partir duquel la Terre ne recevra plus de signal depuis la sonde.