TD 10

Fonction génératrice, Transformée de Laplace

Exercice 1. Loi de Poisson (exam 2019).

1. Déterminer la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Retrouver, à partir de cette fonction génératrice, l'expression de l'espérance et de la variance de cette loi.
3. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

Exercice 2. Fonction génératrice en dimension deux.
Soient $0 < a < b < 1$, et (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi est décrite par

$$\mathbb{P}[X = i, Y = j] = (1-a)(b-a)a^i b^{j-i-1} \mathbb{1}_{\{0 \leq j \leq i\}}.$$

1. Déterminer la fonction génératrice $g_{(X,Y)}$ du couple (X, Y).
2. Déterminer les fonctions génératrices g_X et g_Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3. Identification de la loi avec la fonction génératrice.
Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, dont la fonction génératrice est

$$g_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

pour $t \in [0, 1]$. Déterminer la loi de X, *i.e.* donner $\mathbb{P}[X = i]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Un jeu équitable ?.
On lance n pièce de monnaie différentes (pas forcément équilibrées) de façon indépendante. Si le nombre de faces est pair, vous gagnez, sinon vous perdez. On note $p_i \in [0, 1]$ la probabilité que la pièce numéro i tombe sur "face". À quelle condition sur les p_i ce jeu est-il équitable ?

1. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ n v.a indépendantes telles que pour tout i, $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $G_{S_n}(-1) = 0$ où G_{S_n} est la fonction génératrice de S_n.
2. Calculer G_{S_n}.
3. En conclure que le jeu est équitable si et seulement si au moins une des pièces est équilibrée.

Exercice 5. Transformée de Laplace.
Soit X une variable aléatoire réelle continue, on note f_X sa densité et L_X sa transformée de Laplace, avec $D(L_X)$ le domaine de définition de L_X.

1. Exprimer $\mathbb{E}[X]$ et $\operatorname{Var}(X)$ en fonction de L_X et de ses dérivées.
2. Pour $t \in D(L_X)$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_t(x) = \frac{f_X(x)e^{-tx}}{L_X(t)}.$$

   Montrer que g_t est une densité de probabilités.
3. Soit Y_t une variable aléatoire de densité g_t. Déterminer sa transformée de Laplace L_{Y_t}.
4. Calculer $\mathbb{E}[Y_t]$ et $\operatorname{Var}(Y_t)$.
5. (Difficile) Pour quelles fonctions f_X a-t-on $\operatorname{Var}(Y_t) = \operatorname{Var}(X)$ pour tout $t \in D(L_X)$?