TD 3
Éléments aléatoires

Exercice 1.
1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Doivent-elles avoir le même espace de départ ? Le même espace d'arrivée ?
2. Même question pour deux variables aléatoires de même loi.

Exercice 2.
On considère l'espace $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. On note X la variable aléatoire définie par $X(i, j) = i$ pour tout $(i, j) \in \Omega$. Combien peut-on construire de variables aléatoires Y sur Ω telles que Y a même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Exercice 3.
Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, combien peut-on construire de variables aléatoires Y sur Ω telles que Y est indépendante de X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Exercice 4.
Soit Ω un univers, et $A, B \subset \Omega$ des événements. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Exercice 5.
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[Y = 1] = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Peut-on calculer $\mathbb{E}[XY]$? Si oui, quelle est sa valeur ? Si non, quelles sont les valeurs possibles (donner un intervalle) ?
2. On suppose à présent X et Y indépendantes. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Quelle est la loi de (X, Y) ?
3. On suppose que $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{3}$. Peut-on en déduire la loi de (X, Y) ?

Exercice 6.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X, Y, U, V quatre variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi du couple (X, Y), $\mathbb{P}_U$ la loi de U et $\mathbb{P}_V$ celle de V. On suppose $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V$. Que peut-on en déduire ?

a) (X, Y) et (U, V) ont la même loi.

b) U et V sont indépendantes.

c) X et U ont la même loi.

d) X et Y ont la même loi.

e) X et Y sont indépendantes.

Exercice 7.
Rappelons que si $\lambda > 0$, une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Montrer que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 8.
Soit $n \geq 1$, et $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes de même loi, avec

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_1 = 0] = p,$$

où $0 < p < 1$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$, et donner la loi de S_n.

Exercice 9.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suit une loi géométrique, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{1}_{\{k \geq 1\}} (1 - p)^{k-1} p.$$

Calculer $\mathbb{E}[X]$.