TD 4
Tribus et Mesures

Exercice 1.

1. Soit Ω un univers, et A, B des parties de Ω.
   (a) Quelle est la tribu engendrée par A ?
   (b) Quelle est la tribu engendrée par A et B ?

* 2. Soit Ω un univers, et $(A_i)_{i\geq 1}$ des parties de Ω. Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir la tribu engendrée par $\{A_1, \cdots, A_n\}$?

Exercice 2.
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces probabilisables, et $f : \Omega \to \Omega'$. Lesquelles des affirmations ci-dessous sont vérifiées ?

a) $\{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu sur Ω.

b) $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $f(\Omega)$.

c) $\{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'.

Exercice 3.
Soient Ω, Ω' deux ensembles, $f : \Omega \to \Omega'$ une application, et $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Le but de l'exercice est de montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$.

1. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$.
2. Soit
$$\mathcal{A}' = \{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))\}.$$
Montrer que $\sigma(\mathcal{C}') \subset \mathcal{A}'$, et en déduire que
$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) \subset f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')).$$
3. Conclure.

Exercice 4.
Par quelles collections d'ensembles la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est-elle engendrée ?

a) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Z}$.

b) Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

c) Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

d) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Q}$.

e) Les singletons $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.
Déterminer lesquelles des affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse avec une preuve ou un contre-exemple.

1. L'intersection de deux tribus est une tribu. L'union de deux tribus est une tribu.
2. Si X est un ensemble fini, $\mathcal{P}(X)$ est la seule tribu qui contient les singletons. Même affirmation pour X dénombrable, puis indénombrable.
3. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est mesurable si et seulement si $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\{x \in \Omega, f(x) > r\} \in \mathcal{A}$.

Exercice 6. Un ensemble de Cantor.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n = \{x \in [0,1],\ x \text{ n'a que des 0 ou des 9 dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\},$$

c'est à dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $x = 0, x_1 \cdots x_n \cdots$ avec $(x_1, \cdots x_n) \in \{0, 9\}$. et

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

1. Écrire C_n comme une union d'intervalles disjoints.
2. Calculer $\lambda(C_n)$ pour tout n puis $\lambda(C)$.

Remarque : On peut montrer que l'ensemble C est indénombrable.

Exercice 7.
Dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue notée λ, construire une suite décroissante de boréliens $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n).$$

Indication : à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-on toujours l'égalité ? Il faut trouver une suite qui ne vérifie pas cette condition.

Exercice 8.
Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, invariante par translation, et telle que $\mu(I_1) = 1$, où on note I_x le segment $]0, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\mu(I_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mu(I_q)$ pour $q \in \mathbb{Q}_+$.
3. Déterminer μ.

Exercice 9.
On lance un dé à six faces sans s'arrêter. Construire un espace probabilisé représentant cette expérience. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « On n'obtient que des 6. »
- B : « À partir d'un certain rang, on n'obtient que des 6. »
- C : « On obtient au moins un 6. »
- D : « On obtient une infinité de 6. »