TD 5
Variables aléatoires, Densité, Espérance.

Exercice 1.
On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([-1,1]^2, \mathcal{B}([-1,1]^2), \lambda_2/4)$ (où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) ainsi que les fonctions X et Y définies par

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2 \qquad X(x,y) = x$$

et

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2 \qquad Y(x,y) = \mathbb{1}_{y\in[0,1]}\, x - \mathbb{1}_{y\in[-1,0[}\, x.$$

1. Montrer que X et Y sont des variables aléatoires réelles.
2. Déterminer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
3. Quelle est la loi de X et celle de Y ?
4. Montrer que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 2.
Soient $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, et $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}_X(E) > 0$. On définit une probabilité $\mathbb{P}'$ de la manière suivante : pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}'(B) = \mathbb{P}[X \in B | X \in E].$$

Que peut-on déduire de ces hypothèses ?

a) $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$.

b) $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}_X$.

c) $\mathbb{P}_X \ll \mathbb{P}'$.

d) $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}'} = \mathbb{P}[X \in E]$.

e) $\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}_X} = \frac{\mathbb{1}_E}{\mathbb{P}[X\in E]}$.

Exercice 3.
Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ une variable aléatoire.

1. On suppose X est continue et admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Expliquer pourquoi, pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d\lambda_n(x)$.
2. Montrer la réciproque : on suppose qu'il existe une fonction f telle que pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d\lambda_n(x)$, montrer qu'alors X est continue et que sa densité est f.

Exercice 4. 1. Soit X une variable aléatoire continue, de densité f. Montrer que $Y = |X|$ est une variable aléatoire continue, et déterminer sa densité.

2. Soit X de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la densité de la variable $Y = X^2$ et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

3. Soit U de loi uniforme sur $]0, 1]$. Déterminer la densité de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln U$ et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

4. Soit (X, Y) de loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$. On note (R, Θ) les coordonnées polaires de (X, Y). Quelle est la loi de (R, Θ) ? Calculer $\mathbb{E}[R]$.

Exercice 5.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\{0, 1\}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}[X_n = 0] = \mathbb{P}[X_n = 1] = 1/2$. On définit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

1. Montrer que S est une variable aléatoire réelle.

2. Montrer que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas égale à 1 à partir d'un certain rang, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^n} \Longleftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \prec (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

où $\prec$ est l'ordre lexicographique définit par

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \prec (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x_n < y_n \text{ et } \forall k < n,\ x_k = y_k.$$

3. En déduire que pour tout $y \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}[S < y] = y.$$

4. Quelle est la loi de S ?

Exercice 6. *Le singe savant*.
Un singe tape un texte à l'ordinateur en appuyant au hasard et sans arrêt sur les lettres du clavier. Montrer qu'avec probabilité 1, le texte du singe contiendra une infinité de fois n'importe quel mot de longueur fini. (En particulier, votre livre préféré apparaîtra quelque part dans le texte mais il faudra attendre un certain temps pour le voir apparaître... combien de temps ?)