TD 6
Densité

Exercice 1.
Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ une variable aléatoire.

1. On suppose X est continue et admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Expliquer pourquoi, pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d\lambda_n(x)$.
2. Montrer la réciproque : on suppose qu'il existe une fonction f telle que pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d\lambda_n(x)$, montrer qu'alors X est continue et que sa densité est f.

Exercice 2.
1. Soit X une variable aléatoire continue, de densité f. Montrer que $Y = |X|$ est une variable aléatoire continue, et déterminer sa densité.
2. Soit X de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la densité de la variable $Y = X^2$.
3. Soit U de loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la densité de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. En déduire une façon de simuler informatiquement une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ.
4. Soit (X, Y) de loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Quelle est la loi de X ? et celle de Y ? X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) On note (R, Θ) les coordonnées polaires de (X, Y). Quelle est la loi de (R, Θ) ? R et Θ sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}[R]$.

Exercice 3.
Soit X et Y deux variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes. Montrer que $(X+Y)$ et $X/(X+Y)$ sont indépendantes. Calculer la loi de $X+Y$ et celle de $X/(X+Y)$.

Exercice 4.
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 15y & \text{si } x^2 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la densité de la loi marginale de Y.

Exercice 5.
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Déterminer la densité du vecteur aléatoire $(U, V) = (\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}})$. Que remarquez-vous ?

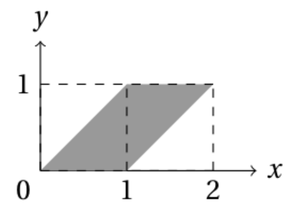
Exercice 6.
Soient X un vecteur aléatoire de taille n et de densité f, et M une matrice inversible de taille $n \times n$.

1. Exprimer la densité du vecteur aléatoire MX en fonction de f et M.

2. Montrer que si X suit une loi uniforme sur $D \subseteq R^n$, alors MX suit une loi uniforme sur $M(D) := \{Mx,\, x \in D\}$.

* 3. Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (c'est à dire que $O^{-1} = {}^tO$). Montrer que si les marginales de X sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi normale centrée réduite, alors il en est de même pour le vecteur OX. En redéduire le résultat de l'exercice 5.

Question 8 ♣ Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur A, où A est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ représenté par la partie grisée de la figure ci-dessous :



Parmi les variables et vecteurs aléatoires suivants, lesquels suivent une loi uniforme ?

- ☐ $X^2 + Y^2$
- ☐ XY
- ☐ $(X+1, 2Y)$
- ☐ X
- ☐ Y
- ☐ $(2X+Y, 3X-Y)$
- ☐ $X-Y$
- ☐ $X+Y$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*