TD 7
Fonction de répartition

Exercice 1.
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On pose $X = \sqrt{U}$. Calculer la fonction de répartition de X, sa densité, et son espérance si elle existe.

2. Faire de même pour $Y = \frac{1}{1+U}$.

Exercice 2.
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de fonction de répartition

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq y, \\ (1 - e^{-y})(1 + e^{-y} - e^{-x}) & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de X ? Celle de Y ?

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Minimum de variables aléatoires i.i.d.
Soient $U_1, ..., U_n$ des variables indépendantes et de même loi, dont la fonction de répartition est notée F. On pose

$$X = \min_{i \in [\![1,n]\!]} U_i.$$

1. Calculer la fonction de répartition de X, notée F_X, en fonction de F.

2. Dans le cas où les U_i sont des variables uniformes sur $[0, 1]$, donner l'expression explicite de F_X. En déduire la loi de X, et calculer son espérance.

3. Même question dans le cas où les U_i sont des variables exponentielles de paramètre $\lambda > 0$.

* 4. Reprendre les questions 1 et 2 lorsque $X = \max_{i \in [\![1,n]\!]} U_i$.

Exercice 4. Théorème de la réciproque (inspiré de l'examen 2018).
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $]0, 1[$. On définit pour tout $u \in]0, 1[$:

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq u\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $G(U)$ a la même loi que X.

1. Montrer que si $F(x) \geq u$, alors $x \geq G(u)$.

2. Montrer que $F(G(u)) \geq u$. En déduire, réciproquement, que si $x \geq G(u)$, alors $F(x) \geq u$.

3. Quelle est la fonction de répartition de $G(U)$? En conclure que $G(U)$ a la même loi que X.

4. Déterminer G dans le cas particulier où X

   (a) suit la loi exponentielle de la paramètre $\lambda > 0$,

   (b) est discrète avec

$$\mathbb{P}[X = -1] = 1/2 \quad \mathbb{P}[X = 1] = 1/3 \quad \mathbb{P}[X = 2] = 5/6.$$

Exercice 5. Taux de hasard.
On rappelle la définition du *taux de hasard* (ou taux de survie) d'une variable aléatoire réelle X (quand elle existe) :

$$h(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \mathbb{P}\left[X \leq x + \delta \middle| X > x\right].$$

On note S la fonction de survie définie par $S(x) = \mathbb{P}[X > x]$.

1. Montrer que $h(x)$ est définie si et seulement si $S(x) > 0$ et S est dérivable à droite en x et dans ce cas
$$h(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$

2. Calculer le taux de hasard dans les cas suivants :

   (a) X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$,

   (b) X suit une loi exponentielle de paramètre λ,

   (c) X suit une loi de Weibull de paramètre $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont la densité est donnée par
$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

3. En utilisant la question 1, montrer que la loi exponentielle est la seule loi sur $\mathbb{R}_+$ dont le taux de hasard est constant.