**ISFA** | Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat | lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 | math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

---

# Éléments de correction TD n° 2

## Martingales discrètes et temps d'arrêts

---

### Exercice 1 : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit $B$ un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

### Exercice 2 : Un petit contre-exemple.

Soit $Z$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

### Exercice 3 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit $B$ un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à $B$. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et comparer ces résultats avec leurs analogues discrets pour la Marche Aléatoire Simple vus à l'exercice 1 du TD 1.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ .
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ .
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Remarque :* Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t\rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique $t$ est le mouvement brownien.

### Exercice 4 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient $B^1$ et $B^2$ deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in ]0,1[$ une constante.

1. Montrez que $(\rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}B_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.
2. En déduire que $B^1B^2$ est une martingale.
   Indication : Que peut-on dire du processus $\left(\left(\frac{B_t^1+B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ?

**<u>Correction exercice 4</u> :**

1. Il s'agit d'un <u>processus Gaussien</u> car pour tout $0 \leq t_1 \leq \cdots t_n$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\rho B^1_{t_i} + \sqrt{1-\rho^2} B^2_{t_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \rho B^1_{t_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i \sqrt{1-\rho^2} B^2_{t_i},$$

   où chaque terme de la somme est une variable aléatoire Gaussienne car $B^1$ et $B^2$ sont des processus Gaussiens. Par ailleurs, ces deux termes sont des v.a indépendantes car $B^1$ et $B^2$ sont indépendants. Or la somme de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes est une variable aléatoire gaussienne (de moyenne la somme des moyennes et de variance la somme des variances). On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} a_i(\rho B^1_{t_i} + \sqrt{1-\rho^2} B^2_{t_i})$ est une v.a gaussienne.
   Le processus est évidemment <u>centré</u>.
   Enfin,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\left(\rho B^1_s + \sqrt{1-\rho^2} B^2_s, \rho B^1_t + \sqrt{1-\rho^2} B^2_t\right) \\
&= \rho^2 \mathrm{Cov}\left(B^1_s, B^1_t\right) + \sqrt{1-\rho^2}^2 \mathrm{Cov}\left(B^2_s, B^2_t\right) + 0 + 0 \quad \text{car } B^1 \text{ et } B^2 \text{ sont indépendants} \\
&= \rho^2 (s \wedge t) + (1-\rho^2)(s \wedge t) \\
&= s \wedge t.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le processus } (\rho B^1_t + \sqrt{1-\rho^2} B^2_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ est un mouvement Brownien.}}$$

2. On sait que la variation quadratique du mouvement Brownien au temps $t$ est $t$ (c.f Exo 3, question 2). Comme, $\frac{B^1_t + B^2_t}{\sqrt{2}}$ est un mouvement brownien d'après la question 1 avec $\rho = 1/\sqrt{2}$, on en déduit que $\left(\left(\frac{B^1_t + B^2_t}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $\left((B^1_t)^2 - t\right)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\left((B^2_t)^2 - t\right)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont des martingales. Or,

$$\begin{aligned}
B^1_t B^2_t &= \left(\frac{B^1_t + B^2_t}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}(B^1_t)^2 - \frac{1}{2}(B^2_t)^2 \\
&= \left(\left(\frac{B^1_t + B^2_t}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right) - \frac{1}{2}\left((B^1_t)^2 - t\right) - \frac{1}{2}\left((B^2_t)^2 - t\right)
\end{aligned}$$

   qui est une combinaison linéaire de martingales donc est une martingale.

$$\boxed{B^1 B^2 \text{ est une martingale}}$$

**<u>Exercice 5</u> : Le pont Brownien.**

Soit $B$ un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0, 1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.

3. En quel temps $t$ la variance de $X_t$ est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

*Remarque :* Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

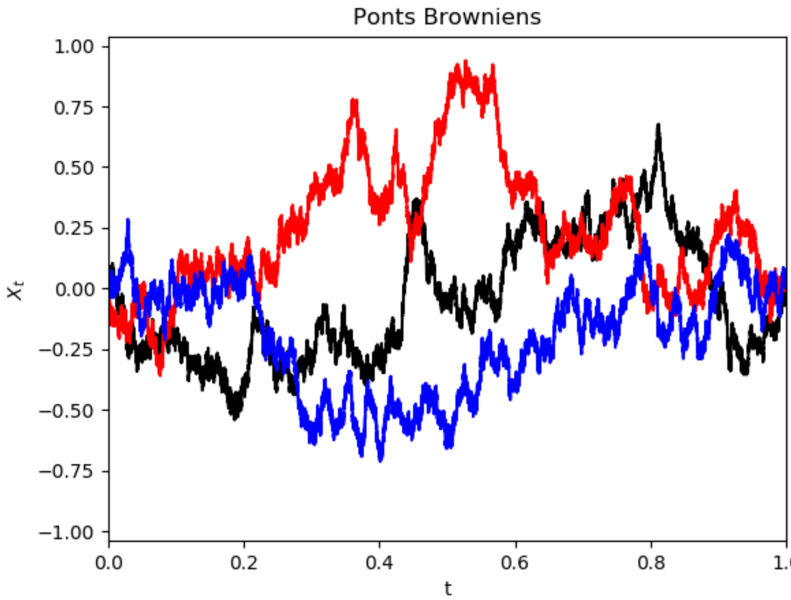


FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

**<u>Correction exercice 5</u> :**

1. Prenons une suite quelconque de temps croissants $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq 1$ et un ensemble de $n$ réels $a_1, ..., a_n$. Montrons que $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ est une variable aléatoire Gaussienne. On a que :
$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^n a_i B_{t_i} + (\sum_{i=1}^n -a_i t_i) B_1,$$
est de la forme
$$\sum_{i=1}^m a'_i B_{t'_i}.$$
Comme $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien, il s'agit donc d'une variable aléatoire Gaussienne.
On en conclut que $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est une processus Gaussien.
2. Pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[B_t] - t\mathbb{E}[B_1] = 0$, donc il s'agit d'un processus Gaussien centré.

Pour tout $0 \leq s \leq t \leq 1$, on a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_s X_t\right] &= \mathbb{E}\left[B_s B_t\right] - s\mathbb{E}\left[B_1 B_t\right] - t\mathbb{E}\left[B_s B_1\right] + st\mathbb{E}\left[B_1^2\right] \\ &= s - st - ts + st \\ &= s(1-t).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s(1-t),\ \forall 0 \leq s \leq t \leq 1$.

3. D'après la question précédente, on a que :

$$\mathbb{V}\left(X_t\right) = \mathrm{Cov}\left(X_t, X_t\right) = t(1-t),$$

qui est donc maximale en $t = 1/2$ et qui vaut $\mathbb{V}\left(1/2\right) = 1/4$.

4. Même si l'espérance est identiquement nulle, il ne s'agit pas d'une martingale car par exemple :

$$\mathbb{E}\left[X_1 \,\middle|\, \mathcal{F}_{1/2}\right] = \mathbb{E}\left[0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{1/2}\right] = 0,$$

alors que $X_{1/2}$ est une variable aléatoire Gaussienne centré de variance $1/4$ donc n'est pas identiquement nulle.

**Exercice 6 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.**

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point $a$ par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , montrer que sa transformée de Laplace est égale à :

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\mathbf{1}_{T_a<+\infty}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$

pour tout $\lambda > 0$.

2. En déduire que $\mathbb{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty$.

**Correction exercice 6 :**

1. On utilise le fait que pour tout $\lambda > 0$, le processus stochastique $\left(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Par ailleurs, $T_a$ est un temps d'arrêt car $\{T_a \geq t\} = \{\sup\{B_s,\ s \in [0,t]\} \geq a\} \in \mathcal{F}_t$.

On peut donc appliquer le **théorème d'arrêt** aux temps d'arrêts bornés $0 \leq t \wedge T_a$.

On obtient l'égalité :

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = 1,$$

puis en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a}\right] = 1.$$

Nous voulons maintenant réaliser la limite $t \to +\infty$. Pour cela, on va utiliser le **théorème de convergence dominée**. D'une part, on a la convergence presque sûre :

$$\begin{aligned} e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2} t\wedge T_a} &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda B_{T_a} - \frac{\lambda^2}{2} T_a} \\ &= \mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a} \qquad \text{(car } B_{T_a} = a \text{ par continuité du mouvement Brownien).} \end{aligned}$$

D'autre part, on a la domination suivante :

$$e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2} t\wedge T_a} \leq e^{\lambda a}, \qquad (\text{car } B_{t\wedge T_a} \leq a)$$

qui est bien intégrable comme variable aléatoire constante. On en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2} t\wedge T_a}\right] &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a}\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} T_a}\right] = 1,$$

puis

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2} T_a}\right] = e^{-\lambda a}.$$

Posons, $\lambda' = \frac{\lambda^2}{2}$, on obtient $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda' T_a}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda'}a}$. On a montré que :

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a}.}$$

2. On a que $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty} e^{-\lambda T_a}\right]$. De plus,

$$\mathbf{1}_{T_a<\infty} e^{-\lambda T_a} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{T_a<\infty},$$

et on a la domination $\mathbf{1}_{T_a<\infty} e^{-\lambda T_a} \leq 1$ donc par le **théorème de convergence dominée**,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty} e^{-\lambda T_a}\right] \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}\right] = \mathbb{P}\left[T_a < \infty\right].$$

D'où,

$$\boxed{\mathbb{P}\left[T_a < \infty\right] = \lim_{\lambda\to 0} e^{-\sqrt{2\lambda}a} = 1.}$$

Ensuite, pour tout $\lambda > 0$, on a par le **théorème de dérivation sous l'intégrale** que :

$$\frac{d\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]}{d\lambda} = \mathbb{E}\left[-T_a e^{-\lambda T_a}\right].$$

Or, par théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}\left[T_a\right] = \lim_{\lambda \to 0} \mathbb{E}\left[T_a e^{-\lambda T_a}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_a\right] &= \lim_{\lambda \to 0} \mathbb{E}\left[T_a e^{-\lambda T_a}\right] \\
&= \lim_{\lambda \to 0} -\frac{d\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]}{d\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} -\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\sqrt{2\lambda}a}\right) \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{a}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}a} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty.}$$