ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 1

Martingales discrètes et temps d'arrêts

Exercice 1 : Les martingales de la marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *marche aléaoire simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des $(\mathcal{F}_n)$-martingales.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S,T)$, $S \vee T = \max(S,T)$ et $S + T$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Exercice 4 : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple définie comme dans l'exercice 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1,\ S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, ..., 4\},\ S_n = 0\}$.

Exercice 5 : **Martingale et processus prévisible**

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T\geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : **La ruine du joueur.**

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. Soit

$$T = \inf\{n,\ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

   Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?
2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.
3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.