ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 2

Mouvement Brownien et Martingales Continues

Exercice 1 : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

Exercice 2 : Un petit contre-exemple.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

Exercice 3 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et comparer ces résultats avec leurs analogues discrets pour la Marche Aléatoire Simple vus à l'exercice 1 du TD 1.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

Exercice 4 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient B^1 et B^2 deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante.

1. Montrez que $(\rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.
2. En déduire que $B^1 B^2$ est une martingale.
   Indication : Que peut-on dire du processus $\left(\left(\frac{B_t^1 + B_t^2}{\sqrt{2}} \right)^2 - t \right)_{t\in\mathbb{R}_+}$?

Exercice 5 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

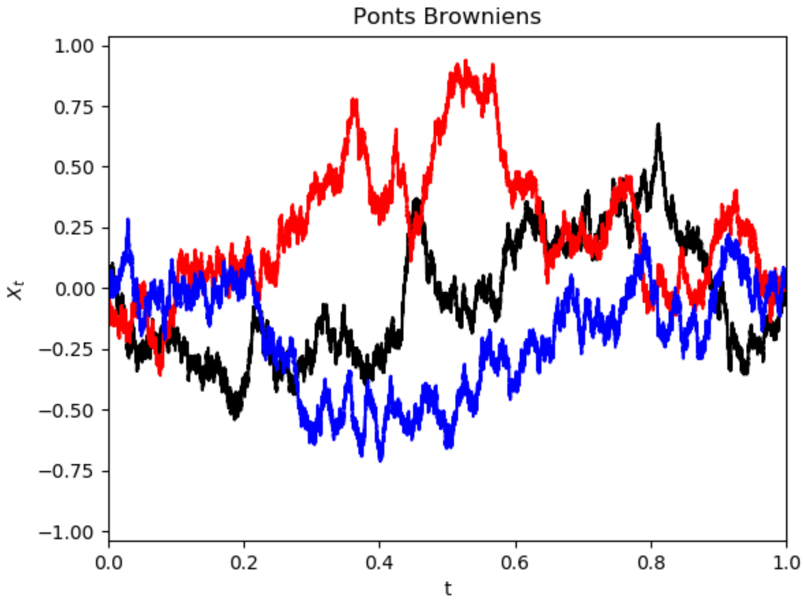

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

Exercice 6 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , montrer que sa transformée de Laplace est égale à :

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\mathbf{1}_{T_a<+\infty}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$

   pour tout $\lambda > 0$.

2. En déduire que $\mathbb{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty$.