ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 3
MOUVEMENT BROWNIEN ET INTÉGRALE STOCHASTIQUE

Exercice 1 : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}(\tau) = -ab$

Exercice 2 : Interprétation de la variation quadratique.

Soit B un mouvement Brownien. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ $t_k^n := \frac{kt}{n}$.

1. Rappeler la définition et la valeur de $\langle B \rangle_t$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} \langle B \rangle_t.$$

Remarques :
— Ce résultat reste vrai si on remplace les $(t_k^n)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ par une subdivision quelconque de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
— Dans le cas général, on peut montrer que pour toute martingale (locale) M ,
$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_{t_{k+1}^n} - M_{t_k^n})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle M \rangle_t.$$

Exercice 3 : Intégrale de Wiener

Dans cet exercice, on pourra utiliser les résultats du cours sans les redémontrer.

1. Justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\cos s)\, dB_s$ est bien définie et que X est un processus gaussien à accroissements indépendants. Calculer son espérance et sa covariance $E(X_s X_t)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[X_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]$.

3. Quelle est la variation quadratique de X ?

<u>Exercice 4</u> : Calcul explicite d'une intégrale stochastique

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s dB_s$, en utilisant la construction vue en cours par approximation par des processus étagés.

1. Montrer que le mouvement Brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *bon processus.*
2. On définit le processus étagé suivant :
$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t)\,,$$
avec $t_k := \frac{kt}{n}$. Montrer que $B^n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega\times[0,t])} B$ c'est à dire que : $\mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s^n - B_s)^2 ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Montrer que
$$\int_0^t B_s^n dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2.$$
Indication : Écrire $B_{t_k} = \frac{1}{2}(B_{t_{k+1}} + B_{t_k}) - \frac{1}{2}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$.
4. En utilisant le résultat de l'exercice 2, montrer enfin que
$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\,.$$

Remarque : On s'assure que B_{t_k} est bien mesurable par rapport à la tribu indexée par la borne gauche de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ à savoir $\mathcal{F}_{t_k}$. Si, par exemple, on remplaçait B_{t_k} par $B_{t_{k+1}}$ qui n'est pas $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable mais $\mathcal{F}_{t_{k+1}}$-mesurable, on obtiendrait un résultat différent : $\frac{1}{2}B_t^2 + \frac{1}{2}t$ (Exercice : le démontrer).