ISFA — Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat — lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 — math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 4

Intégrale stochastique et crochets des martingales locales continues.

Le tableau suivant résume le cadre de définition de l'intégrale stochastique $I_t(\theta) := \int_0^t \theta_s dB_s$ ainsi que les propriétés du processus associé.

<table>
<tr><td></td><td>Intégrale de Wiener</td><td colspan="2">Intégrale Stochastique généralisée</td></tr>
<tr><td>Cadre de définition</td><td>Fonctions déterministes L^2
$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$</td><td>Bon processus
$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$</td><td>Bon processus locaux
$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Propriétés de $(I_t(\theta))_{t\in\mathbb{R}_+}$:</td><td colspan="2">Martingale</td><td>Martingale <u>locale</u></td></tr>
<tr><td colspan="3">Variation quadratique : $\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds$
Crochets de martingale : $\langle I(\theta), I(\theta')\rangle_t = \int_0^t \theta_s \theta'_s ds$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I(\theta)_t^2 - \langle I(\theta)\rangle_t$ est une martingale</td><td>idem mais que <u>locale</u></td></tr>
<tr><td>Processus Gaussien, centré,
de fonction de covariance :
$\mathbb{E}\left[I_t(\theta) I_s(\theta)\right] = \int_0^{s\wedge t} \theta_u^2 du$.
Processus à accroissements
indépendants.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

On rappel aussi que :

- Si M est une martingale locale telle que $\mathbb{E}\left[\langle M_t\rangle\right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$, alors M et $M^2 - \langle M\rangle$ sont des (vraies) martingales
- Si M et N sont deux martingales locales telles que $\mathbb{E}\left[\langle M_t\rangle\right] < +\infty$, $\mathbb{E}\left[\langle N_t\rangle\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[\langle M, N\rangle_t\right] < +\infty$, $\forall t \geq 0$, alors $MN - \langle M, N\rangle$ est une (vraie) martingale.

<u>Exercice 1</u> : Une intégrale stochastique

Soit B un mouvement Brownien. Dans chaque cas, dire si $\int_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$ est bien définie et préciser les propriétés du processus stochastique associé $(\int_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s)_{t\geq 0}$:

1. $\theta_s = B_s^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
2. $\theta_s = e^{B_s^3}$.

<u>Exercice 2</u> : Variation quadratique et mouvements Browniens indépendants.

Soit $B^1, \cdots, B^n$ n mouvement Browniens mutuellement indépendants adaptés par rapport à leur filtration naturelle produit et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Justifier que $\lambda_1 B^1 + \cdots + \lambda_n B^n$ est une martingale et calculer sa variation quadratique.

Exercice 3 : Variation quadratique et intégrales stochastiques.

On note $M_t = \int_0^t B_s dB_s$, $N_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$ et $V_t = \int_0^t B_s^4 ds$.

1. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\langle M \rangle_t$, $\langle N \rangle_t$, $\langle M, N \rangle_t$ et $\langle M + N, N + V \rangle_t$.
2. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$, $\mathbb{E}\left[N_t^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[M_t N_t\right]$.
3. Écrire $X_t := \int_0^t B_s dM_s + \int_0^t e^{-B_s} d\langle N \rangle_s + \int_0^t B_s^2 dV_s$ comme processus d'Itô.

Exercice 4 : Retour sur $\int_0^t B_s dB_s$.

En appliquant la formule d'Itô à B_t^2, (re)montrez que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$.

Exercice 5 : Processus d'Itô et martingales

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Ecrire les processus suivants comme processus d'Itô, c'est à dire sous la forme :

$$x_0 + \int_0^t \mu(s, B_s) ds + \int_0^t \sigma(s, B_s) dB_s.$$

1. $X_t = \exp(\frac{t}{2}) \sin(B_t)$
2. $Y_t = B_t^2 \exp\left(B_t + t\right)$
3. $Z_t = \left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t \geq 0}$
4. Le(s)quel(s) des processus précédents sont des martingales ? Justifiez votre réponse.