Éléments de correction TD 1

Espaces probabilisés discrets

Exercice 1.
On veut modéliser le lancer de deux dés à six faces, un rouge et un noir. Trois modèles sont proposés :

a) $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, où l'élément (i,j) de Ω_1 représente l'éventualité «le dé rouge a donné i, et le dé noir a donné j».

b) $\Omega_2 = \{(i,j) \in \{1,...6\}^2, i \leq j\}$, où l'élément (i,j) de Ω_2 représente l'éventualité «le résultat des dés, mis dans l'ordre croissant, est (i,j)».

c) $\Omega_3 = \{2,3,...,12\}$, où l'élément k de Ω_3 représente l'éventualité «la somme des résultats des dés est k».

Pour chacun de ces modèles, donner la loi de probabilité dont il faut munir l'univers choisi afin qu'il corresponde bien à l'expérience.
De plus, on définit A : «Les deux dés ont donné 2 et 3» ; B : «le dé rouge a donné 6» ; C : «la somme des deux dés est 5». Pour chaque modèle, déterminer si A, B et C sont des événements. Si oui, les écrire comme sous-ensemble de l'univers et donner leur probabilité.

Exercice 2.
On considère une famille avec 4 enfants (sans jumeaux) choisie au hasard dans la population.
Soit A l'événement : " Parmi les enfants, il y a 2 filles et 2 garçons "
Soit B l'événement : " Les 2 premiers enfants sont de sexes différents"

a) Proposer un espace probabilisé pour décrire l'expérience.

b) Calculer $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[A \cap B]$ et $\mathbb{P}[A \cup B]$.

Exercice 3. Père Noël secret.
Un groupe de N ami.e.s souhaite s'offrir des cadeaux de manière aléatoire et secrète. Pour cela, on associe à chaque participant.e un numéro entre 1 et N et on distribue à chacun.e au hasard des jetons numérotés de 1 à N indiquant la personne à qui offrir son cadeau. On cherche à calculer la probabilité que personne ne s'offre un cadeau à soi même.
Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N, l'ensemble des permutations sur $\{1, \cdots, N\}$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_N$. Pour tout entier j entre 1 et N, on note A_j l'événement "la j^{e} personne a tiré son propre numéro" ?

a) Calculer $\mathbb{P}_N[A_j]$.

b) On fixe k entiers $i_1 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ de $\{1, \cdots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1, \cdots \sigma(i_k) = i_k$ et en déduire $\mathbb{P}_N[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}]$.

c) On note B l'événement "personne ne tire son propre numéro". Exprimer $\bar{B}$ à l'aide des A_j.

d) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $\mathbb{P}_N[B]$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Exercice 4. Paradoxe des anniversaires.
Quelle est la probabilité p_n qu'au moins deux personnes dans un groupe de n personnes soufflent leurs bougies d'anniversaire le même jour ? Faire l'application numérique pour votre groupe de TD. À partir de combien de personnes cette probabilité dépasse-t-elle 1/2 ? (voir Figure 1)

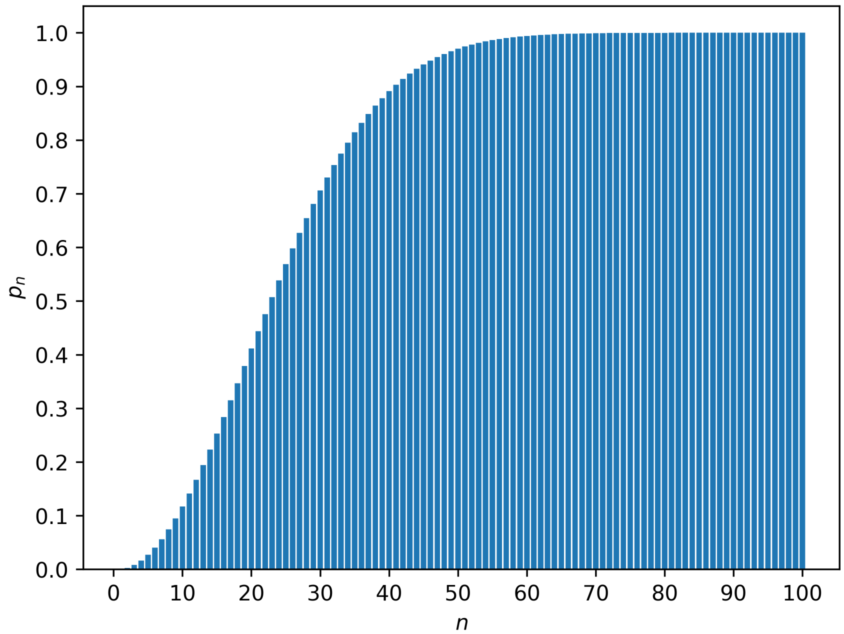

FIGURE 1 – Probabilité qu'au moins deux personnes dans un groupe de n personnes soient nées le même jour.

Correction exercice 4 : On fait l'hypothèse que toutes les personnes sont nées un jour tiré uniformément au hasard d'une année non bissextile. On modélise donc la situation par l'espace probabilisé produit $\Omega_n = \{1, \cdots, 365\}^n$ que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$.
Calculons la probabilité $1 - p_n$ que toutes les personnes soient nées un jour différent. Pour cela, comptons le nombre de façons possibles d'attribuer n jours de naissance différents compris entre 1 et 365. Il y a 365 possibilités pour la première personne puis plus que 364 pour la deuxième ... puis $365 - n + 1$ pour la n^{e} personne ce qui fait au total $\prod_{i=1}^{n}(365 - i + 1)$ possibilités. Par ailleurs, Ω_n est de cardinal 365^n. On en déduit que

$$\boxed{p_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{365-i+1}{365}.}$$

Cette probabilité est croissante avec le nombre de personnes (ce qui est logique car plus il y a de gens, plus il y a de chance que deux d'entre eux soient nés le même jour).

Application numérique : (calculs fait avec Python) pour $n = 22$, on trouve environ 48% de chance qu'au moins 2 personnes soient nées le même jour alors que pour $n = 23$, on trouve environ 51% de chance. À partir de 23 personnes, il y a donc plus d'une chance sur deux que deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour. Cela peut paraître surprenant car 23 est bien inférieur à 365, le nombre de jours dans l'année d'où le nom *paradoxe des anniversaires* !

Entraînements QCM.

Exercice 5.
On lance 5 fois un dé équilibré. On note N le nombre de 6 obtenu en tout, et on note S_i l'événement «le i-ème lancer a donné un 6». Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

1. $\{N=2\} = \bigcup_{i\neq j}(S_i \cap S_j)$.
2. $\{N=0\} = \bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i}$.
3. $\{N=2\} \subset \bigcup_{i=1}^{5} S_i$.
4. $\{N=2\} = \bigcap_{i\neq j}(S_i \cup S_j)$

Correction exercice 5 :

1. FAUX : on a seulement $\{N=2\} \subseteq \bigcup_{i\neq j}(S_i \cap S_j)$. Si par exemple les 3 premiers lancers donnent 6, $\{N=2\}$ ne sera pas réalisé alors que $\bigcup_{i\neq j}(S_i \cap S_j)$ le sera.
2. VRAI : faire zéro 6 est équivalent à ce que tous les dés ne donnent pas 6.
3. VRAI : si on a obtenu deux 6, alors au moins un des cinq dés à donné 6
4. FAUX : si par exemple tous les dés donnent 6, on aura $\{N=5\}$ mais pourtant l'événement $\bigcap_{i\neq j}(S_i \cup S_j)$ sera réalisé.

Exercice 6.
Soit Ω un univers, C un événement, et $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur Ω. Sans hypothèse supplémentaire, lesquelles des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ suivantes sont bien des probabilités ?

1. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A] + \mathbb{P}_2[A]$.
2. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A]\mathbb{P}_1[C] + \mathbb{P}_2[A]\mathbb{P}_1[\overline{C}]$.
3. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A \cap C] + \mathbb{P}_2[A \cap \overline{C}]$

Correction exercice 6 :

1. FAUX car $\mathbb{P}_1[\Omega] + \mathbb{P}_2[\Omega] = 2 \neq 1$
2. VRAI : on peut vérifier que l'application est positive, la valeur associée à Ω vaut 1 et elle est σ-additive.
3. FAUX : car $\mathbb{P}_1[\Omega \cap C] + \mathbb{P}_2[\Omega \cap \overline{C}] = \mathbb{P}_1[C] + \mathbb{P}_2[\overline{C}]$ qui n'a aucune raison d'être égal à 1. Par contre, $A \mapsto \mathbb{P}_1[A \cap C] + \mathbb{P}_1[A \cap \overline{C}]$ est bien une probabilité !

Exercice 7.
Soient A et B deux événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Sans hypothèse supplémentaire, lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

1. $\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$.
2. Si $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \frac{1}{4}$.
3. $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B])$.
4. Si $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1$, alors $\mathbb{P}[A \cap B] = 1$.
5. $\mathbb{P}[A \cap B]^2 \leq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$.

Correction exercice 7 :

1. VRAI d'après le cours
2. FAUX : penser par exemple au cas où $B = \overline{A}$ et $\mathbb{P}[A] = 1/2$
3. VRAI : on a même $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \min(\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B]) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B])$
4. VRAI car d'après la formule du Crible, $\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] = 2$ ce qui n'est possible que si $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \cup B] = 1$.
5. VRAI car $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A]$ et $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[B]$ donc en multipliant ces inégalités (concernant des nombres positifs), on obtient l'inégalité voulue.