Éléments de correction TD 3

Éléments aléatoires

Exercice 1. 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Doivent-elles avoir le même espace de départ ? Le même espace d'arrivée ?

2. Même question pour deux variables aléatoires de même loi.

Exercice 2. *Entraînement QCM.*
On considère l'espace $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. On note $X : \Omega \to \{1, \ldots, 6\}$ la variable aléatoire définie par $X(i, j) = i$ pour tout $(i, j) \in \Omega$.
Combien peut-on construire de variables aléatoires $Y : \Omega \to \{1, \ldots, 6\}$ de même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Combien peut-on construire de variables aléatoires $Y : \Omega \to \{1, \ldots, 6\}$ indépendante et de même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Exercice 3.
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Peut-on calculer $\mathbb{E}[XY]$? Si oui, quelle est sa valeur ? Si non, quelles sont les valeurs possibles (donner un intervalle) ?
2. On suppose à présent X et Y indépendantes. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Quelle est la loi de (X, Y) ?
3. On suppose que $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{3}$. Peut-on en déduire la loi de (X, Y) ?

Correction exercice 3 :

1. Fait en classe.
2. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1/2 \times 1/2 = 1/4$.

$$\boxed{\mathbb{E}[XY] = \tfrac{1}{4}.}$$

On a que pour tout $(x, y) \in \{0, 1\}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) &= \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)\\ &= 1/2 \times 1/2 = 1/4.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (X, Y) \text{ suit la loi uniforme sur } \{0, 1\}^2.}$$

3. On sait que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1)$. Par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} 1/2 &= \mathbb{P}(X = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0) + 1/3. \end{aligned}$$
On en déduit que $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0) = 1/2 - 1/3 = 1/6$. De même, on montre que
$$\begin{aligned} 1/2 &= \mathbb{P}(Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 1) + 1/3, \end{aligned}$$
et donc que $\mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 1) = 1/6$. Enfin, comme la somme des probabilités doit valoir 1, on en déduit que $\mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 0) = 1 - 1/6 - 1/6 - 1/3 = 1/3$. Finalement, la loi de (X, Y) est donnée par
$$\boxed{\mathbb{P}_{(X,Y)} = \tfrac{1}{3}\delta_{(0,0)} + \tfrac{1}{6}\delta_{(0,1)} + \tfrac{1}{6}\delta_{(1,0)} + \tfrac{1}{3}\delta_{(1,1)}.}$$

Exercice 4.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X, Y, U, V quatre variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi du couple (X, Y), $\mathbb{P}_U$ la loi de U et $\mathbb{P}_V$ celle de V. On suppose $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V$. Que peut-on en déduire ?

a) (X, Y) et (U, V) ont la même loi.

b) U et V sont indépendantes.

c) X et U ont la même loi.

d) X et Y ont la même loi.

e) X et Y sont indépendantes.

<u>Correction exercice 4</u> : Soit T_X, T_Y, T_U, T_V les espaces d'arrivée des variables X, Y, U, V. La loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de (X, Y) est une mesure de probabilité sur l'espace produit $T_X \times T_Y$ et la mesure produit $\mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V$ est une mesure de probabilité sur l'espace produit $T_U \times T_V$. L'hypothèse $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V$ suppose donc implicitement que $T_X \times T_Y = T_U \times T_V$, c'est à dire que
$$T_X = T_U \quad \text{et} \quad T_Y = T_V.$$
De plus, on a que pour tout sous-ensemble $A \subseteq T_X$ et $B \subseteq T_Y$,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) &= \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) \\ &\mathbb{P}\left((X, Y)^{-1}(A \times B)\right) \\ &= \mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times B) \\ &= \mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V(A \times B) \\ &= \mathbb{P}_U(A) \times \mathbb{P}_V(B) \\ &= \mathbb{P}(U \in A) \times \mathbb{P}(V \in B). \end{aligned}$$

En particulier, en prenant B égal à tout l'espace d'arrivée T_Y, on obtient que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}\left(X \in A \cap \underbrace{Y \in T_Y}_{=\Omega}\right)\\ &= \mathbb{P}(U \in A) \times \underbrace{\mathbb{P}(V \in T_V)}_{=1} = \mathbb{P}(U \in A).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout sous-ensemble $A \subseteq T_X$, on en déduit que X et U ont la même loi. De même, en choisissant $A = T_X$ et $B \subseteq T_Y$, on obtient que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in B) &= \mathbb{P}\left(\underbrace{X \in T_X}_{=\Omega} \cap Y \in B\right)\\ &= \underbrace{\mathbb{P}(U \in T_X)}_{=1} \times \mathbb{P}(V \in B) = \mathbb{P}(V \in B),\end{aligned}$$

et donc Y et V ont la même loi ! Finalement, on obtient que pour tout sous-ensemble $A \subseteq T_X$ et $B \subseteq T_Y$,

$$\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B),$$

et donc X et Y sont indépendantes.

Réponse : c) et e) sont vraies et on ne peut rien dire de plus sur les autres réponses. On ne connait pas $\mathbb{P}_{(U,V)}$, la loi jointe de U et de V ni les lois de X ou de Y.

Exercice 5.
Soit Ω un univers, et $A, B \subset \Omega$ des événements. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Correction exercice 5 : Montrons que $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on a que $\mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) \in \{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1 &\Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(\omega) = 1\\ &\Leftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \in B\\ &\Leftrightarrow \omega \in A \cap B\\ &\Leftrightarrow \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.}$$

Ensuite, il est facile de voir que $\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_B$ (EXERCICE : le vérifier). Or $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\setminus B} &= \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}}\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\overline{B}}\\ &= \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)\\ &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.}$$

Ensuite, il est facile de voir que pour deux événements **disjoints** A et B, on a que $\mathbb{1}_{A\sqcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ (EXERCICE : le vérifier). Or, on a que $A \cup B = A \sqcup B \setminus A$ et A et $B \setminus A$ sont disjoints. On en déduit, grace à la question précédente, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_{A\sqcup B\setminus A} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\setminus A} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.}$$

Exercice 6.
Soit $n \geq 1$, $p \in [0,1]$ et $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes de même loi, avec

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p.$$

1. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner la loi de S_n.
2. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$.
3. Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ ainsi que des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ qui satisfont les hypothèses de l'exercice.

Correction exercice 6 :

1. La variable aléatoire S_n prend des valeurs entre 0 et n. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, pour que $S_n = k$, il faut et il suffit que l'ensemble des indices i tels que $X_i = 1$ soit de cardinal k ce qui se traduit par

$$\{S_n = k\} = \bigcup_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \{X_i = 1 \, \forall i \in I\} \cap \{X_j = 0 \, \forall j \notin I\}.$$

   On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = k) &= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \mathbb{P}(X_i = 1 \, \forall i \in I \, \cap \, X_j = 0 \, \forall j \notin I) \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \prod_{j \notin I} \mathbb{P}(X_j = 0) \qquad \text{par indépendance des } X_i \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},
\end{aligned}$$

   car il y a exactement $\binom{n}{k}$ partie I incluses dans $[\![1,n]\!]$ de cardinal k. D'où

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}\left(S_n = k\right) = \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Il s'agit d'une loi binomiale de paramètre (n, p).

2. Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_n\right] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k\right] \\
&= n\mathbb{E}\left[X_1\right] \\
&= n(0 \times \mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) + 1 \times \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right)) \\
&= np.
\end{aligned}$$

3. Comme les variables aléatoires sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p, un espace probabilisé produit est adapté pour construire ce genre de variables aléatoires. Par exemple,

$$\Omega = \{0,1\}^n \qquad \mathbb{P} = \left((1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1\right)^{\otimes n},$$

et ensuite définir pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$X_i : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) & \longmapsto & \omega_i. \end{cases}$$

On vérifie facilement que les v.a $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 7.
Rappelons que si $\lambda > 0$, une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Montrer que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

<u>Correction exercice 7</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1+X_2=k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k}(X_1=i \cap X_2=k-i)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\left(X_1=i \cap X_2=k-i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\left(X_1=i\right)\mathbb{P}\left(X_2=k-i\right) \qquad \text{par indépendance de } X_1, X_2\\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\,\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\\
&= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\
&= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\
&= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k \qquad \text{par la formule du binome de Newton}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}\left(X_1+X_2=k\right) = \tfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.}$$

La variable aléatoire X_1+X_2 suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Exercice 8.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suit une loi géométrique, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(X=k\right) = \mathbb{1}_{\{k\geq 1\}}(1-p)^{k-1}p.$$

Calculer $\mathbb{E}\left[X\right]$.

<u>Correction exercice 8</u> : Par définition de l'espérance d'une v.a discrète,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\right] &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}\left(X=k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p.
\end{aligned}$$

Maintenant, on peut utiliser que la série entière de rayon de convergence 1:

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Par ailleurs, par somme de série géométrique, $g(x) = (1-x)^{-1}$ et donc $g'(x) = (1-x)^{-2}$ pour tout $x \in]-1,1[$. On en déduit l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En appliquant cela à $x = 1-p$, on obtient finalement que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p\,\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \tfrac{1}{p}.}$$