Éléments de correction TD 4
TRIBUS ET MESURES

1 Tribus

Exercice 1.
Soit Ω un univers, et A, B des parties de Ω.

1. Quelle est la tribu engendrée par A ?

2. Quelle est la tribu engendrée par A et B ?

* 3. (à faire uniquement si on a fini le TD) : Soit Ω un univers, et $A_1, \ldots, A_n$ des parties de Ω. Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir la tribu engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$?

Exercice 2. *Entraînement QCM.*
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces probabilisables, et $f : \Omega \to \Omega'$. Lesquelles des affirmations ci-dessous sont vérifiées ?

a) $\{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu sur Ω.

b) $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $f(\Omega)$.

c) $\{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'.

Exercice 3. *Entraînement QCM.*
Par quelles collections d'ensembles la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est-elle engendrée ?

a) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Z}$.

b) Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

c) Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

d) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Q}$.

e) Les singletons $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Par quelles collections de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ est-elle engendrée ?

a) La collection des rectangles $[a, a+s] \times [b, b+t]$, pour $a, b \in \mathbb{Q}$ et $s, t \in \mathbb{Q}_+$

b) La collection des droites de $\mathbb{R}^2$

c) La collection des carrés $[a, a+s] \times [b, b+s]$, pour $a, b \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}_+$

d) La collection des singletons $\{x\}$, pour $x \in \mathbb{R}^2$

e) La collection des ouverts de $\mathbb{R}^2$

f) La collection des disques ouverts de $\mathbb{R}^2$

g) La collection des fermés de $\mathbb{R}^2$

2 Mesures

Exercice 4.
Montrer que les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont des Boréliens et calculer leur mesure de Lebesgue.

1. $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\}$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.

Correction exercice 4 :

1. On remarque que Δ est fermé donc est un Borélien. Pour le montrer, on peut soit utiliser la caractérisation séquentielle des fermés, soit remarquer que $\Delta = f^{-1}(\{0\})$ avec $f : (x,y) \mapsto x-y$ qui est une application continue et $\{0\}$ un ensemble fermé.

   Ensuite, pour calculer sa mesure de Lebesgue, nous allons revenir à la définition en approchant Δ par une union de rectangles dont on sait que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est égale à l'aire. On peut écrire
   $$\Delta = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_n$$
   avec
   $$\Delta_n = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [n, n+1[\}.$$
   Or, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,
   $$\Delta_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} [n + \frac{k-1}{M}, n + \frac{k}{M}]^2$$
   d'où,
   $$\begin{aligned}\lambda_2(\Delta_n) &\leq \sum_{k=1}^{M} \lambda_2([n + \frac{k-1}{M}, n + \frac{k}{M}]^2) \\ &= M \times \left(\frac{1}{M}\right)^2 \\ &= \frac{1}{M}.\end{aligned}$$
   Ceci étant vrai pour tout entier M, on en déduit que
   $$\lambda_2(\Delta_n) = 0$$
   puis que
   $$\boxed{\lambda_2(\Delta) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_2(\Delta_n) = 0.}$$

2. On peut écrire
   $$A = B \cap C$$
   avec
   $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\} \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \notin \mathbb{Q}\} = \overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{R}.$$
   On a que $B = g^{-1}([0,1])$ avec $g : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ qui est une fonction continue et $[0,1]$ qui est fermé donc B est fermé. C'est donc un Borélien de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc est un borélien de R car

$$\boxed{\text{Toute partie dénombrable est mesurable par rapport à la tribu borélienne.}}$$

En effet, si D est dénombrable, D peut s'écrire comme

$$D = \bigcup_{x \in D} \{x\}$$

et les singletons sont des boréliens donc une union dénombrable également. Par stabilité par complémentaire, on en déduit que l'ensemble des irrationnels $\overline{\mathbb{Q}}$ est également un borélien de $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que

$$C = \overline{\mathbb{Q}} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

où la dernière égalité a été vue en cours. Finalement,

$$\boxed{A \text{ est un borélien de } R^2 \text{ comme intersection de deux boréliens } B \text{ et } C.}$$

Pour calculer sa mesure de lebesgue, on utilise que

$$A = B \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$$

donc

$$\lambda_2(A) = \lambda_2(B) - \lambda_2(B \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{R})$$

Or

$$\lambda_2(B) = \pi$$

car il s'agit de l'aire de la boule unité de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \lambda_2(B \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{R}) &\leq \lambda_2(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \\ &= \lambda_1(\mathbb{Q}) \times \lambda_1(\mathbb{R}) \\ &= 0 \times +\infty \\ &= 0, \end{aligned}$$

par règle de multiplication des mesures dans $\mathbb{R}_+ \cup \infty$.

Finalement

$$\boxed{\lambda_2(A) = \pi.}$$

Remarque : le fait que $\mathbb{Q}$ soit de mesure de Lebesgue nulle vient encore du fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et donc

$$\lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda_1(\{q\}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Exercice 5. Un ensemble de Cantor.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n = \{x \in [0,1],\ x \text{ n'a que des 0 ou des 9 dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\},$$

c'est à dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $x = 0, x_1 \cdots x_n \cdots$ avec $(x_1, \cdots x_n) \in \{0, 9\}$. et

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

1. Écrire C_n comme une union d'intervalles disjoints.
2. Calculer $\lambda(C_n)$ pour tout n puis $\lambda(C)$.

Bonus : Montrer que l'ensemble C est indénombrable.

Correction exercice 5 :

1. On peut montrer que :
$$C_n = \bigsqcup_{(x_1,\dots,x_n) \in \{0,9\}^n} I_{x_1,\cdots,x_n}$$
avec
$$I_{x_1,\cdots,x_n} := [0, x_1 \cdots x_n, 0, x_1 \cdots x_n + 10^{-n}[,$$
et ces intervalles sont bien deux à deux disjoints.
2. On en déduit donc quelle
$$\begin{aligned}\lambda(C_n) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in \{0,9\}^n} \lambda(I_{x_1,\cdots,x_n}) \\ &= \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in \{0,9\}^n} 10^{-n} \\ &= 2^n \times 10^{-n} = 5^{-n}.\end{aligned}$$
Maintenant, comme les ensembles C_n sont décroissants ($C_{n+1} \subseteq C_n$) et de mesure finie, on en déduit que
$$\lambda(C) = \lambda(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n) \lim_{n \to \infty} \lambda(C_n) = 0.$$

Bonus : Pour montrer que C est indénombrable, on peut utiliser le fait que C est en bijection avec $\{0, 9\}^{\mathbb{N}}$ qui est indénombrable (pour le montrer, on peut utiliser l'argument diagonal de Cantor).

Exercice 6.
Dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue notée λ, construire une suite décroissante de boréliens $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n).$$

Indication : à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-on toujours l'égalité ? Il faut trouver une suite qui ne vérifie pas cette condition.

Correction exercice 6 : Si les A_n sont de mesure fini, alors l'égalité est bien vrai. Il faut donc considérer une suite de A_n décroissantes de mesure infini. Prenons par exemple

$$A_n = [n, +\infty[.$$

On a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ et donc

$$\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0.$$

Par contre,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = +\infty.$$

Exercice 7.
Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, invariante par translation, et telle que $\mu(I_1) = 1$, où on note I_x le segment $]0, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\mu(I_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mu(I_q)$ pour $q \in \mathbb{Q}_+$.
3. Déterminer μ.

Correction exercice 7 : Notons $I_{x,y} =]x, y]$ pour tout réels $x < y$.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mu(I_n) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} I_{k,k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(I_{k,k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(I_1\right) && \text{par invariance par translation de } \mu \\
&= n.
\end{aligned}$$

2. Maintenant pour tout rationnel $q = m/n$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
\mu\left(I_q\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{m-1} I_{k/n,(k+1)/n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mu\left(I_{k/n,(k+1)/n}\right) \\
&= m\mu\left(I_{1/n}\right) && \text{par invariance par translation de } \mu
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} 1 = \mu\left(I_1\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} I_{k/n,(k+1)/n}\right) \\ &= n\mu\left(I_{1/n}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\mu\left(I_{1/n}\right) = 1/n.$$

Finalement pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$,

$$\mu\left(I_q\right) = m\mu\left(I_{1/n}\right) = m/n = q.$$

3. D'après la question précédente et par invariance par translation, on en déduit que pour tous rationnels $a < b$,

$$\mu(]a,b]) = \mu(]0,b-a]) = b-a,$$

et on peut montrer facilement (par invariance par translation) que $\mu(]-a,b]) = \infty$ si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. La mesure μ coïncide avec la mesure de Lebesgue sur le semi-anneau formé par les intervalles de la forme $]a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ qui engendre la tribu borélienne. Par unicité du prolongement donné par le théorème de Carathéodory, on en déduit finalement que μ est la mesure de Lebesgue.

La mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariante par translation et telle que l'intervalle $]0,1]$ a mesure 1.

Exercice 8.
On lance un dé à six faces sans s'arrêter. Construire un espace probabilisé représentant cette expérience. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « On n'obtient que des 6. »
- B : « À partir d'un certain rang, on n'obtient que des 6. »
- C : « On obtient au moins un 6. »
- D : « On obtient une infinité de 6. »

Correction exercice 8 : On peut modéliser un lancer de dé par l'espace probabilisé $(\llbracket 1,6\rrbracket, \mathcal{P}(\llbracket 1,6\rrbracket), \mu)$ où μ est la mesure uniforme. Pour modéliser une infinité de lancers de dés, on considère l'espace probabilisé produit (c.f le cours) :

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left(\llbracket 1,6\rrbracket^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}\left(\llbracket 1,6\rrbracket\right)^{\otimes\mathbb{N}^*}, \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}\right).$$

Notons X_n l'événement "le n ième lancer donne 6" que l'on peut écrire mathématiquement comme

$$X_n = \llbracket 1,6\rrbracket^{n-1} \times \{6\} \times \llbracket 1,6\rrbracket^{\mathbb{N}\setminus\llbracket 1,n\rrbracket}.$$

1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}*} X_n\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} X_n\right) && \text{car } \bigcap_{n\in\mathbb{N}*} X_n = \bigcap_{N\in\mathbb{N}*}\left(\bigcap_{n=1}^{N} X_n\right) \text{ et } \left(\bigcap_{n=1}^{N} X_n\right)_{N\in\mathbb{N}*} \text{ est décroissant} \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\{6\}^N \times [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}\setminus[\![1,N]\!]}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^N && \text{par définition de la mesure produit} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\liminf X_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k} X_n\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} X_n\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} X_n\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{N-k+1} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}(\text{On obtient aucun } 6) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\{1,2,3,4,5\}^{\mathbb{N}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}*} \{1,2,3,4,5\}^N \times [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}\setminus[\![1,N]\!]}\right) \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\{1,2,3,4,5\}^N \times [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}\setminus[\![1,N]\!]}\right) \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(\limsup X_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}*}\bigcup_{n\geq k} X_n\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq k} X_n\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} \bar{X_n}\right) \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} \bar{X_n}\right) \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bar{X_n}\right)^{N-k+1} \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k+1} \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$