TD 1
Espaces probabilisés discrets

Exercice 1.
On veut modéliser le lancer de deux dés à six faces, un rouge et un noir. Trois modèles sont proposés :

a) $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, où l'élément (i, j) de Ω_1 représente l'éventualité «le dé rouge a donné i, et le dé noir a donné j».

b) $\Omega_2 = \{(i, j) \in \{1, ...6\}^2, i \leq j\}$, où l'élément (i, j) de Ω_2 représente l'éventualité «le résultat des dés, mis dans l'ordre croissant, est (i, j)».

c) $\Omega_3 = \{2, 3, ..., 12\}$, où l'élément k de Ω_3 représente l'éventualité «la somme des résultats des dés est k».

Pour chacun de ces modèles, donner la loi de probabilité dont il faut munir l'univers choisi afin qu'il corresponde bien à l'expérience.
De plus, on définit A : «Les deux dés ont donné 2 et 3» ; B : «le dé rouge a donné 6» ; C : «la somme des deux dés est 5». Pour chaque modèle, déterminer si A, B et C sont des événements. Si oui, les écrire comme sous-ensemble de l'univers et donner leur probabilité.

Exercice 2.
On considère une famille avec 4 enfants (sans jumeaux) choisie au hasard dans la population.
Soit A l'événement : " Parmi les enfants, il y a 2 filles et 2 garçons "
Soit B l'événement : " Les 2 premiers enfants sont de sexes différents"

a) Proposer un espace probabilisé pour décrire l'expérience.

b) Calculer $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[A \cap B]$ et $\mathbb{P}[A \cup B]$.

Exercice 3. Père Noël secret.
Un groupe de N ami.e.s souhaite s'offrir des cadeaux de manière aléatoire et secrète. Pour cela, on associe à chaque participant.e un numéro entre 1 et N et on distribue à chacun.e au hasard des jetons numérotés de 1 à N indiquant la personne à qui offrir son cadeau. On cherche à calculer la probabilité que personne ne s'offre un cadeau à soi même.
Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N, l'ensemble des permutations sur $\{1, \cdots, N\}$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_N$. Pour tout entier j entre 1 et N, on note A_j l'événement "la j^{e} personne a tiré son propre numéro" ?

a) Calculer $\mathbb{P}_N[A_j]$.

b) On fixe k entiers $i_1 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ de $\{1, \cdots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1, \cdots \sigma(i_k) = i_k$ et en déduire $\mathbb{P}_N[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}]$.

c) On note B l'événement "personne ne tire son propre numéro". Exprimer $\bar{B}$ à l'aide des A_j.

d) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $\mathbb{P}_N[B]$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Exercice 4. Paradoxe des anniversaires.
Quelle est la probabilité p_n qu'au moins deux personnes dans un groupe de n personnes soufflent leurs bougies d'anniversaire le même jour ? Faire l'application numérique pour votre groupe de TD. À partir de combien de personnes cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$? (voir Figure 1)

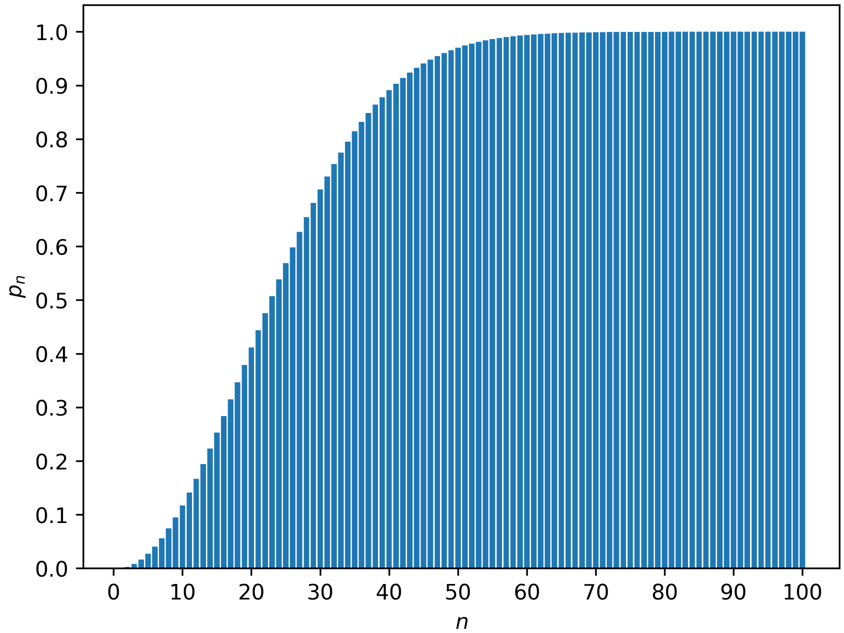

FIGURE 1 – Probabilité qu'au moins deux personnes dans un groupe de n personnes soient nées le même jour.

Entraînements QCM.

Exercice 5.
On lance 5 fois un dé équilibré. On note N le nombre de 6 obtenu en tout, et on note S_i l'événement «le i-ème lancer a donné un 6». Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

1. $\{N = 2\} = \bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j)$.
2. $\{N = 0\} = \bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i}$.
3. $\{N = 2\} \subset \bigcup_{i=1}^{5} S_i$.
4. $\{N = 2\} = \bigcap_{i \neq j} (S_i \cup S_j)$

Exercice 6.
Soit Ω un univers, C un événement, et $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur Ω. Sans hypothèse supplémentaire, lesquelles des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ suivantes sont bien des probabilités ?

1. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A] + \mathbb{P}_2[A]$.
2. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A]\mathbb{P}_1[C] + \mathbb{P}_2[A]\mathbb{P}_1[\overline{C}]$.
3. $A \mapsto \mathbb{P}_1[A \cap C] + \mathbb{P}_2[A \cap \overline{C}]$

Exercice 7.
Soient A et B deux événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Sans hypothèse supplémentaire, lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ?

1. $\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$.
2. Si $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}[A \cap B] \geq \frac{1}{4}$.
3. $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B])$.
4. Si $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1$, alors $\mathbb{P}[A \cap B] = 1$.
5. $\mathbb{P}[A \cap B]^2 \leq \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.