TD 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1.
Une urne contient initialement une boule rouge. Vous lancez un dé équilibré :

— si vous faites un 5 ou un 6, vous tirez une boule au hasard dans l'urne et le jeu s'arrête.

— sinon, vous rajoutez une boule blanche dans l'urne et relancez le dé.

Si la boule que vous tirez est rouge, vous gagnez la partie et sinon, vous la perdez. Ce jeu vous est-il favorable ?
Pour y répondre, on note R l'événement : "vous tirez une boule rouge", A_n l'événement "le jeu s'arrête au n^{e} tour" et A l'événement "le jeu s'arrête après un nombre fini de tours".

1. Calculer $\mathbb{P}[A_n]$ en fonction de n et montrer que A est un événement presque sûr.
2. Calculer $\mathbb{P}[R \mid A_n]$.
3. Calculer $\mathbb{P}[R]$ et conclure.

   Indication : on pourra utiliser l'égalité $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ valable pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

Exercice 2.
Un laboratoire a mis au point un test pour détecter une maladie qui touche 0.1% de la population. Le test est fiable à 99%, c'est à dire que pour une personne infectée, le résultat du test est positif dans 99% des cas et que pour une personne saine, il est positif dans 1% des cas.

1. Un individu est testé positivement. Quelle est la probabilité qu'il soit en fait sain ?
2. Inversement, quelle est la probabilité qu'un individu testé négativement soit en fait infecté ?
3. Quelle est la probabilité qu'un individu testé deux fois positifs pour deux tests fiables à 99% et indépendants soit en fait sain ?

Exercice 3.
On lance 3 fois une pièce de monnaie équilibrée. On note B_1 : «la pièce tombe du même côté au $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ lancers», B_2 : «la pièce tombe du même côté au 1^{er} et $3^{\text{ème}}$ lancers» et B_3 : «la pièce tombe du même côté au 1^{er} et $2^{\text{ème}}$ lancers».

1. Construire un espace probabilisé qui modélise trois lancers de pièce indépendants.
2. Montrer que B_1, B_2 et B_3 sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 4.
On dispose de deux cartes, l'une est noire des deux côtés, l'autre a un côté noir et un côté rouge. On tire uniformément une des cartes, et on observe que son recto est noir. Quelle est la probabilité que son verso soit rouge ?

Exercice 5.
Une personne a deux enfants. Lorsqu'on lui demande si elle a une fille, elle répond «Oui !»
Quelle est la probabilité que cette personne ait deux filles ?
(*) Même question si cette personne répond «Oui !» à la question «Avez-vous une fille née un Lundi ?». Même question si cette personne répond «Oui !» à la question «Avez-vous une fille qui s'appelle Mélanie ?»

Entraînements QCM :

Exercice 6.
Soient A, B, C trois événements de probabilité non nulle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{P}_C$ la probabilité définie par $\mathbb{P}_C[E] = \mathbb{P}[E|C]$. À quelle condition les événements A et B sont-ils indépendants pour $\mathbb{P}_C$?

a) A et B sont tous deux indépendants de C pour $\mathbb{P}$.

b) A, B, C sont deux à deux indépendants pour $\mathbb{P}$.

c) A, B, C sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}$.

d) A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

Exercice 7.
On considère deux espaces probabilisés discrets $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, et on définit leur espace produit

$$(\Omega, \mathbb{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2).$$

Lesquelles des propositions suivantes sont vraies ?

a) Pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega_1, \omega_2\}] = \mathbb{P}[\{\omega_1\}]\,\mathbb{P}[\{\omega_2\}]$.

b) Pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega_1, \omega_2\}] = \mathbb{P}_1[\{\omega_1\}]\mathbb{P}_2[\{\omega_2\}]$.

c) Pour tous $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \mathbb{P}_1[\{\omega_1\}]\mathbb{P}_2[\{\omega_2\}]$.

d) Pour tous $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$, A_1 et A_2 sont indépendants.

e) Pour tous $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, A et B sont indépendants.

f) Pour tous $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$, $A_1 \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times A_2$ sont indépendants.