lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD 3
Éléments aléatoires

Exercice 1.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Doivent-elles avoir le même espace de départ ? Le même espace d'arrivée ?
2. Même question pour deux variables aléatoires de même loi.

Exercice 2. *Entraînement QCM.*
On considère l'espace $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. On note $X : \Omega \to \{1, \dots, 6\}$ la variable aléatoire définie par $X(i, j) = i$ pour tout $(i, j) \in \Omega$.
Combien peut-on construire de variables aléatoires $Y : \Omega \to \{1, \dots, 6\}$ de même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Combien peut-on construire de variables aléatoires $Y : \Omega \to \{1, \dots, 6\}$ indépendante et de même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Exercice 3.
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Peut-on calculer $\mathbb{E}[XY]$? Si oui, quelle est sa valeur ? Si non, quelles sont les valeurs possibles (donner un intervalle) ?
2. On suppose à présent X et Y indépendantes. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Quelle est la loi de (X, Y) ?
3. On suppose que $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{3}$. Peut-on en déduire la loi de (X, Y) ?

Exercice 4. *Entraînement QCM.*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X, Y, U, V quatre variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi du couple (X, Y), $\mathbb{P}_U$ la loi de U et $\mathbb{P}_V$ celle de V. On suppose $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_U \otimes \mathbb{P}_V$. Que peut-on en déduire ?

a) (X, Y) et (U, V) ont la même loi.

b) U et V sont indépendantes.

c) X et U ont la même loi.

d) X et Y ont la même loi.

e) X et Y sont indépendantes.

Exercice 5.
Soit Ω un univers, et $A, B \subset \Omega$ des événements. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Exercice 6.
Soit $n \geq 1$, $p \in [0,1]$ et $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes de même loi, avec

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p.$$

1. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner la loi de S_n.
2. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$.
3. Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ ainsi que des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ qui satisfont les hypothèses de l'exercice.

Exercice 7.
Rappelons que si $\lambda > 0$, une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est de loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Montrer que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 8.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suit une loi géométrique, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{1}_{\{k\geq 1\}}(1-p)^{k-1}p.$$

Calculer $\mathbb{E}[X]$.