TD 5
Variables aléatoires réelles

Exercice 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A, B \in \mathcal{A}$. On définit la variable aléatoire suivante :

$$X = a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B,$$

où $a, b > 0$. Décrire $\sigma(X)$, et donner la loi de X.

Exercice 2.
On concisère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,2], \mathcal{B}([0,2]), \lambda/2)$ et

$$X : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \max(\omega, 1/3) \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire réelle. Calculer $\sigma(X)$, la tribu engendrée par X et donner la loi de X.

Exercice 3. ***Nombres univers***.
Un nombre univers est un nombre telle que sa suite de décimales contient n'importe qu'elle succession de chiffres de longueur finie (comme votre date de naissance par exemple). On se propose de montrer qu'un nombre tiré réel pris uniformément au hasard entre 0 et 1 est presque sûrement un nombre univers.
On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in [0,1[$, on note $X_n(\omega)$ la n^{e} decimale de ω.

1. Montrer que X_n est une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. Montrer que la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante.
3. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $s = s_1, \ldots, s_\ell \in \{0, \ldots, 9\}^\ell$ une succession finie de chiffres de longueur ℓ. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement

$$A_k(s) = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{X_{i+k\ell} = s_i\}.$$

   Calculer $\mathbb{P}(A_k(s))$ et montrer que les $(A_k(s))_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants.
4. Calculer $\mathbb{P}(\limsup_k A_k(s))$.
5. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des successions de chiffres de longueur finie. Montrer que $\mathcal{S}$ est dénombrable.
6. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{s\in\mathcal{S}} \limsup_k A_k(s)\right) = 1$ et conclure.

Exercice 4. ***Simulation d'une loi uniforme par une suite de piles ou faces***.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\{0,1\}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. On définit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

1. Montrer que S est une variable aléatoire réelle.
2. Montrer que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}*}$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ n'est pas égale à 1 à partir d'un certain rang, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^n} \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}*} \prec (y_n)_{n\in\mathbb{N}*}$$

   où $\prec$ est l'ordre lexicographique définit par

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}*} \prec (y_n)_{n\in\mathbb{N}*} \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x_n < y_n \text{ et } \forall k < n,\ x_k = y_k.$$

3. Soit $y \in [0,1]$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ son écriture décimale en base 2 i.e $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^n}$. Calculer $\mathbb{P}(X_n < y_n \text{ et } \forall k < n,\ X_k = y_k)$ en fonction de n et de y_n.
4. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = 1\}) = 0$ puis déduire que pour tout $y \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(S < y) = y.$$

5. Quelle est la loi de S ?

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire positive.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est mesurable.
2. Écrire $\mathbb{P}(X > x)$ comme l'intégrale (sous $\mathbb{P}$ d'une indicatrice).
3. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, d\lambda(x),$$

   où λ est la mesure de Lebesgue.
4. Comment s'écrit l'expression précédente dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$?