TD 7
Densité de vecteurs aléatoires

Exercice 1. *Inspiré de l'examen 2020.*
Soit X et Y deux variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes. Montrer que $(X+Y)$ et $X/(X+Y)$ sont indépendantes. Calculer la loi de $X+Y$ et celle de $X/(X+Y)$.

Exercice 2.
(X,Y) de loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Quelle est la loi de X ? et celle de Y ? X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On note (R,Θ) les coordonnées polaires de (X,Y). Quelle est la loi de (R,Θ) ? R et Θ sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}[R]$.

Exercice 3.
Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

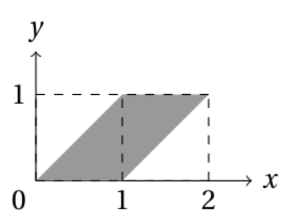
Déterminer la densité du vecteur aléatoire $(U,V) = (\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}})$. Que remarquez-vous ?

Exercice 4.
Soient X un vecteur aléatoire de taille n et de densité f, et M une matrice inversible de taille $n \times n$.

1. Exprimer la densité du vecteur aléatoire MX en fonction de f et M.
2. Montrer que si X suit une loi uniforme sur $D \subseteq R^n$, alors MX suit une loi uniforme sur $M(D) := \{Mx,\ x \in D\}$.

* 3. Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (c'est à dire que $O^{-1} = {}^tO$). Montrer que si les marginales de X sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi normale centrée réduite, alors il en est de même pour le vecteur OX. En redéduire le résultat de l'exercice 3.

Question 8 ♣ Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur A, où A est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ représenté par la partie grisée de la figure ci-dessous :



Parmi les variables et vecteurs aléatoires suivants, lesquels suivent une loi uniforme ?

- ☐ X^2+Y^2
- ☐ XY
- ☐ $(X+1, 2Y)$
- ☐ X
- ☐ Y
- ☐ $(2X+Y, 3X-Y)$
- ☐ $X-Y$
- ☐ $X+Y$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 5. *Révision sur l'absolue continuité....*
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et A un événement de probabilité non nulle. On note $\mathbb{P}_X$ la loi de X, et on définit la probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par

$$\mathbb{P}'(B) = \mathbb{P}[X \in B | A]$$

pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathbb{P}'$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_X$.
2. Calculer la densité de $\mathbb{P}'$ par rapport à $\mathbb{P}_X$ dans les cas suivants :
   (a) A est indépendant de $\sigma(X)$.
   (b) $A = \{X \in E\}$ où $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   (c) $A = \{Z \in E\}$ où $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $Z = X(1 - 2Y)$, où Y est une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendante de X.