ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2019-2020 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

Éléments de correction TD n° 1

Mouvement Borwnien et temps d'arrêts

Exercice 1 : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

Exercice 2 : Un petit contre-exemple.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère le processus $(X_t)_{t\geq 0} = (\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ ainsi que $(B_t)_{t\geq 0}$, un mouvement brownien.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, X_t a même loi que B_t.
2. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

Exercice 3 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

Exercice 4 : Temps d'arrêts et mouvement Brownien.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. $T = \max\{t \in [0,1],\ B_t = 0\}$.

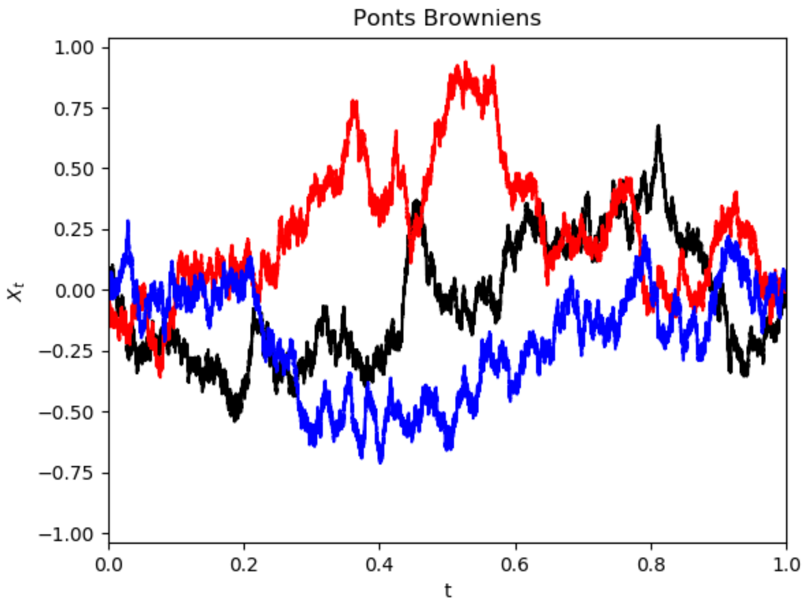

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

Correction exercice 1 :

1. Supposons que $a \geq 0$. La variable aléatoire réelle τ_a est bien d'un temps d'arrêt car pour tout $t \geq 0$,

$$\{\tau_a \leq t\} = \{\sup_{s\in[0,t]} B_s \geq a\},$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires et car $B_0 = 0$ et B est continue. Or, $\sup_{s\in[0,t]} B_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc on a bien que

$$\forall t \geq 0,\ \{\tau_a \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et donc

$$\boxed{\tau_a \text{ est un temps d'arrêt.}}$$

Si $a \leq 0$, on procède de la même façon en utilisant que

$$\{\tau_a \leq t\} = \{\inf_{s\in[0,t]} B_s \leq a\}.$$

<u>Remarque</u> : $\sup_{s\in[0,t]} B_s$ est bien $\mathcal{F}_t$ - mesurable car, par continuité de B et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\sup_{s\in[0,t]} B_s = \sup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \underbrace{B_s}_{\mathcal{F}_t\text{-mesurable}}$$

On conclut en utilisant que le sup d'un nombre dénombrable de fonctions mesurables est mesurable.

2. Ce n'est pas un temps d'arrêt car la connaissance des valeurs de B sur l'intervalle $[0, t]$ ne suffit pas à déterminer si $T \leq t$ ou non : on a besoin de connaître B sur $[0, 1]$.

   Remarque : Si on voulait faire une preuve rigoureuse, on pourrait raisonner par l'absurde en considérant l'événement :

$$\text{"}(B_{T+s} - B_T)_{s\leq 0} \text{ s'annule sur [0,1/2]"} \bigcap \{T \leq 1/2\} = \emptyset$$

   car si $T \leq 1/2$, cela veut dire, par définition de T que B ne s'annule plus sur $[T, 1]$ donc pas sur $[T, T + 1/2]$ et donc $(B_{T+s} - B_T)_{s\leq 0} = (B_{T+s})_{s\leq 0}$ ne peut pas s'annuler sur $[0, 1/2]$. Or, par propiété de Markov Fort, on a que $B_{T+s} - B_T)_{s\leq 0}$ est un Mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$. Or, T est $\mathcal{F}_T$-mesurable donc

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}(\emptyset) &= \mathbb{P}\left(\text{"}(B_{T+s} - B_T)_{s\leq 0} \text{ s'annule sur [0,1/2]"} \bigcap \{T \leq 1/2\}\right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}\left(\text{"}(B_t)_{s\leq 0} \text{ s'annule sur [0,1/2]"}\right)}_{>0} \times \underbrace{\mathbb{P}\left(T \leq 1/2\right)}_{>0} \\ &> 0 \end{aligned}$$

   ce qui est une contradiction.

Exercice 5 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S, T)$ et $S \vee T = \max(S, T)$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à droite adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

   Indication : On pourra montrer que la variable aléatoire définie par $Y_T^n := \sum_{i=1}^{n^2} X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T\in[t_{i-1}^n, t_i^n[}$ avec $t_i^n := \frac{i}{n}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable et converge vers Y_T.

Correction exercice 2 :

1. On a que pour tout $t \geq 0$,

$$\{\min(S, T) \leq t\} = \{S \leq t\} \bigcup \{T \leq t\}$$

   et

$$\{\max(S, T) \leq t\} = \{S \leq t\} \bigcap \{T \leq t\}.$$

   Or, comme S et T sont des temps d'arrêts, on a que $\{S \leq t\}$ et $\{T \leq t\}$ sont dans $\mathcal{F}_t$ et donc $\{\min(S, T) \leq t\}$ et $\{\max(S, T) \leq t\}$ également par stabilité par union et intersection des tribus. Finalement,

$$\boxed{\min(S,T) \text{ et } \max(S,T) \text{ sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}.}$$

2. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Montrons que $A \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, il faut montrer que pour tout $t \geq 0$, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Or, comme $S \leq T$, on a que $\{T \leq t\} \subseteq \{S \leq t\}$ et donc

$$\begin{aligned} A \cap \{T \leq t\} &= A \cap \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \\ &= \underbrace{(A \cap \{S \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}, \end{aligned}$$

car $A \in \mathcal{F}_S$. On en déduit que pour tout $t \geq 0$, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et donc $A \in \mathcal{F}_T$. En conclusion,

$$\boxed{\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T.}$$

3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_T^n est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Comme une somme finie de fonction mesurables est mesurable, il suffit de montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n^2$, $X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Pour cela, il faut montrer que
   - c'est une variable aléatoire, c'est à dire que pour tout Borélien B, $\{X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[} \in B\}$ est un événement de $\mathcal{F}$ (la tribu sous-jacente).
   - pour tout $t \geq 0$, pour tout Borélien B $\{X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[} \in B\} \cap \{T \leq t\}$ est un événement de $\mathcal{F}_t$.

   Soit donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut écrire,

$$\{X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[} \in B\} = \{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\} \cap \{X_{t_i^n} \in B\} \bigcup \{T < t_{i-1}^n\} \cap \{0 \in B\} \bigcup \{T \geq t_i^n\} \cap \{0 \in B\}$$

   Il s'agit bien d'un événement (dans $\mathcal{F}$) ce qui montre le premier point.

   Ensuite, pour tout $t \geq 0$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &\{X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[} \in B\} \cap \{T \leq t\} \\ &= \begin{cases} \left(\{T < t_{i-1}^n\} \cup \{T \in [t_i^n, t]\}\right) \cap \{0 \in B\} \bigcup \{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\} \cap \{X_{t_i^n} \in B\} & \text{si } t \geq t_i^n \\ \{T < t_{i-1}^n\} \cap \{0 \in B\} \bigcup \{T \in [t_{i-1}^n, t[\} \cap \{X_{t_i^n} \in B\} & \text{si } t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\\ \{T < t_{i-1}^n\} \cap \{0 \in B\} & \text{si } t < t_{i-1}^n, \end{cases} \end{aligned}$$

   Comme T est un temps d'arrêt et que $X_{t_i^n}$ est $\mathcal{F}_{t_i^n}$-mesurable, on en déduit que dans chacun de ces trois cas, $\{X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[} \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On a donc que $X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[}$ est bien $\mathcal{F}_T$-mesurable puis

$$\boxed{Y_T^n \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable.}}$$

   Ensuite, grâce à la continuité à droite de X, on peut montrer pas trop difficilement que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_T^n(\omega) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} Y_T.$$

   Or, une limite de fonctions mesurables est mesurable donc

$$\boxed{Y_T \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable.}}$$

<u>Exercice 6</u> : Variation quadratique du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ $t_k^n := \frac{kt}{n}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 \underset{n\to\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} t.$$

<u>Remarque</u> : on note $\langle B \rangle_t = t$ la limite obtenue ci-dessus. Le processus $(\langle B \rangle_t)_{t\geq 0}$ s'appelle la variation quadratique du mouvement Brownien et peut être également définie comme l'unique processus croissant tel que $B_t^2 - \langle B \rangle_t$ soit une martingale.

<u>Correction exercice 3</u> : Il faut montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 - t\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or, par linéarité de l'espérance, on a que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1}^n - t_k^n \\
&= t_n^n = t.
\end{aligned}$$

car $B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n} \sim \mathcal{N}(0, t_{k+1}^n - t_k^n)$. On en déduit donc que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 - t\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right).$$

Or, par indépendance des accroissements, on a que

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left((B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right).$$

Maintenant, comme $B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n} \sim \mathcal{N}(0, t_{k+1}^n - t_k^n)$ et que $t_{k+1}^n - t_k^n = t/n$, on a que

$$B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n} \overset{\text{loi}}{=} \sqrt{\frac{t}{n}}\, Z$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et donc

$$\operatorname{Var}\left((B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right) = \operatorname{Var}\left(t/n\, Z^2\right) = (t/n)^2 \times \operatorname{Var}\left(Z^2\right) = 2\,(t/n)^2$$

(je vous laisse vérifier que $\operatorname{Var}\left(Z^2\right) = 2$). Finalement on a

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 - t\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Var}\left((B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2(t/n)^2 \\
&= 2\frac{t^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$