ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2020-2021 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 1

Mouvement Borwnien et temps d'arrêts

Exercice 1 : Propriétés du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faible),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporelle),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité),

Exercice 2 : Un petit contre-exemple.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère le processus $(X_t)_{t\geq 0} = (\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ ainsi que $(B_t)_{t\geq 0}$, un mouvement brownien.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, X_t a même loi que B_t.
2. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

Exercice 3 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

Exercice 4 : Temps d'arrêts et mouvement Brownien.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

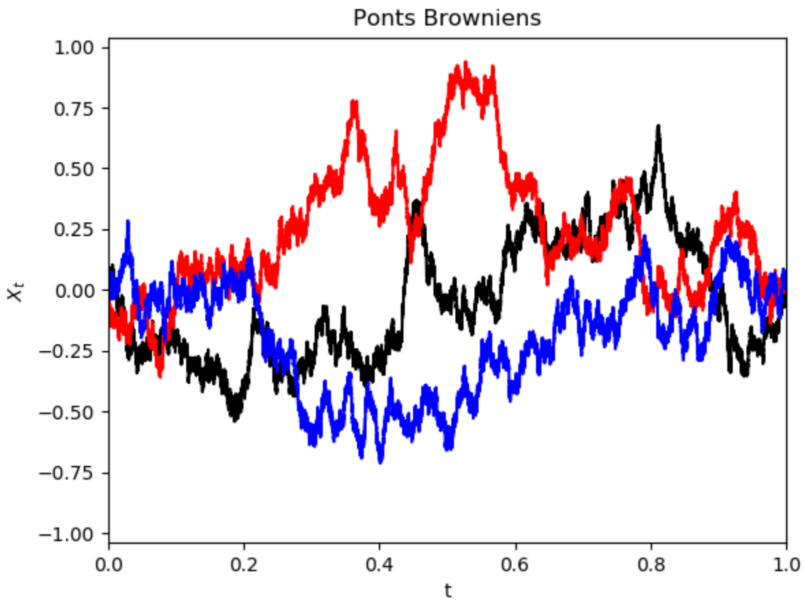

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

2. $T = \max\{t \in [0,1],\ B_t = 0\}$.

Exercice 5 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S,T)$ et $S \vee T = \max(S,T)$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à droite adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

   Indication : On pourra montrer que la variable aléatoire définie par $Y_T^n := \sum_{i=1}^{n^2} X_{t_i^n} \mathbf{1}_{T \in [t_{i-1}^n, t_i^n[}$ avec $t_i^n := \frac{i}{n}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable et converge vers Y_T.

Exercice 6 : Variation quadratique du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ $t_k^n := \frac{kt}{n}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} t.$$

Remarque : on note $\langle B \rangle_t = t$ la limite obtenue ci-dessus. Le processus $(\langle B \rangle_t)_{t\geq 0}$ s'appelle la variation quadratique du mouvement Brownien et peut être également définie comme l'unique processus croissant tel que $B_t^2 - \langle B \rangle_t$ soit une martingale.